می‌دانیم $\quad |a| - |A| \le |A - a| \le e_a$

: $\quad |A| \ge |a| - e_a$ یا $\dfrac{1}{|A|} \le \dfrac{1}{|a| - e_a}$ یا

$\longrightarrow$ داریم $\quad \delta(a) = \dfrac{e(a)}{|A|} \le \dfrac{e(a)}{|a| - e_a} \le \dfrac{e_a}{|a| - e_a}$ خطای مطلق حدی *

خطای مطلق

خطای مطلق همیشه از خطای مطلق حدی کوچکتر است.

بنابراین اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد در این صورت

$|a| - e_a \cong |a| \xrightarrow{*} \boxed{\delta(a) \cong \dfrac{e(a)}{|a|}}$ فرمول

مثلاً یک انتگرال می‌دهند. می‌گویند طوری انتگرال را حل کنید که کران خطا 10^{-5} باشد $\left|\int_a^b f(x)dx - a\right| \le e_a$

اعمال جبری روی خطا : $\longleftarrow$ اگر منفی بود، قدر مطلق می‌گذارند در فرمول

اگر a و b تقریب‌هایی از A و B و همگی این اعداد مثبت در این صورت

$$A = a + \varepsilon_a \qquad |\varepsilon_a| = e(a)$$

$$B = b + \varepsilon_b \qquad |\varepsilon_b| = e(b)$$

حال این جمع‌ها (الف) جمع
$$\begin{cases} e(a+b) \le e(a) + e(b) \\ \delta(a+b) \le \operatorname{Max}\{\delta(a), \delta(b)\} \end{cases}$$

$e(a+b) = |A+B-a-b| = |A-a+B-b| \le |A-a|+|B-b| = e(a)+e(b)$

$e(a-b) = |A-B-a+b| = |A-a-(B-b)| \le |A-a|+|B-b| = e(a)+e(b)$

ب) تفریق
$$\begin{cases} e(a-b) \le e(a) + e(b) \\ \delta(a-b) \cong \dfrac{e(a-b)}{|a-b|} \text{ یا } \delta(a-b) \cong \dfrac{e_{a-b}}{|a-b|} \end{cases}$$

$\longleftarrow$ کران خطاش با جمع فرق نکرده

حال در حالت تفریق باشه:

اثبات: $e(a \pm b) = |(A \pm B) - (a \pm b)| \leqslant |A - a| + |B - b| = e(a) + e(b)$

پس حداکثر خطاشون باهم جمع شد (علامتش باشه یا مثبت، فرقی نمی کنه.)

اثبات: $\delta(a+b) \leqq \dfrac{e(a+b)}{a+b} \leqslant \dfrac{e(a)+e(b)}{a+b}$

به شکل خطای نسبی a و b می خوام $\delta(a)$ و $\delta(b)$

$$= \frac{a}{a+b}\,\frac{e(a)}{a} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{e(b)}{b} = \frac{a}{a+b}\delta(a) + \frac{b}{a+b}\delta(b)$$

$$\leqslant \frac{a}{a+b}\,\mathrm{Max}\{\delta(a),\delta(b)\} + \frac{b}{a+b}\,\mathrm{Max}\{\delta(a),\delta(b)\}$$

$$= \mathrm{Max}\{\delta(a),\delta(b)\}$$

اگر گفتند تفریق دو عدد را حساب کنید، حال اگر مخرج صفر شود، چه می شود؟ $\delta(a-b) = \dfrac{e(a-b)}{|a-b|}$

چند تا مسائل می نویسیم

مثال:

$(3D) \quad A = \dfrac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\pi} \doteq \dfrac{1}{(1.414+1.732)-3.142} \leqq 250$

اگر $(9D)$ $\quad A = 214.01\ldots$ $(9D)$ دقیق‌تر است.

چون دسیمال های توی مخرج کسر، دقیق‌تر از هم کم می شوند.

پس اگر a و b نزدیک بودند، برای حساب $\delta(a-b)$ باید دسیمال و اعشار بالا حساب کنید

مثال: در $A = 1 - \cos x$ که x نزدیک صفر است، از چه فرمولی برای حلش باید استفاده کنیم (سوال کنکور)

مثال: $A = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2}} - \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{x^2}}$ اگر x خیلی بزرگ

جواب: $A = 1-\cos x \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{2}$

حال x به سمت صفر میرود، مخرج به سمت 2 میرود. مبهم نیست دیگه

جواب: $A = \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{x^2-\frac{1}{x^2}} \overset{\text{ضرب در مزدوج}}{=} \frac{2/x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{1}{x^2}}} = \frac{2/x^2}{2x} = \frac{1}{x^3}$

تمرین: نشان دهید

ج) $\begin{cases} e(ab) \leq a\,e(b) + b\,e(a) \\ \delta(ab) \leq \delta(a) + \delta(b) \end{cases}$

از روی تعریف، خودبخود اثبات می‌شود.
به راحتی یعنی $e(ab) = |AB-ab|$ را ادامه بدهید.
این فرمول‌ها همون فرمول‌های مشتق است دیگه.

د) $\begin{cases} e\left(\frac{a}{b}\right) \leq \frac{a\,e(b) + b\,e(a)}{b^2} \\ \delta\left(\frac{a}{b}\right) \leq \delta(a) + \delta(b) \end{cases}$

جلسه سوم

مثال: مطلوبست تقریبی از $\sqrt{17}\times\sqrt{5}$ و محاسبه حداکثر خطا (محاسبات تا 3 رقم اعشار)

$e(a\cdot b) \leq a\,e(b) + b\,e(a)$

$A = \sqrt{17} = 4.123 + E_{\sqrt{17}}$ $\quad E_{\sqrt{17}} \leq 0.5\times10^{-3}$ چون محاسبات تا سه رقم

$B = \sqrt{5} = 2.236 + E_{\sqrt{5}}$ $\quad E_{\sqrt{5}} \leq 0.5\times10^{-3}$

$\sqrt{17}\times\sqrt{5} = \underbrace{9.219028}_{\text{تا دو عدد با سه رقم اعشار را ضرب بشون می‌شه 6 رقم اعشار}} + E_{\sqrt{17}\times\sqrt{5}} = 9.219 + E_{\sqrt{17}\sqrt{5}}$ + خطای گرد کردن تا 3 رقم

$E_{\sqrt{17}\sqrt{5}} \leq 4.123\,E_{\sqrt{5}} + 2.236\,E_{\sqrt{17}} \leq 0.5\times10^{-3}\,[4.123+2.236]$

$\to E_{\sqrt{17}\times\sqrt{5}} \leq \frac{1}{2}\times 6.359\times10^{-3}$ خطای عمل ضرب

خطای کل = خطای عمل ضرب + خطای گرد کردن تا سه رقم $\leq \frac{1}{2}\times 6.359\times10^{-3} + \frac{1}{2}\times10^{-3} = \varepsilon$

$\longrightarrow 9.219 - \varepsilon \leq \sqrt{17} \times \sqrt{5} \leq 9.219 + \varepsilon$

نوشته با ماشین حساب تا ۵ رقم بنویسید بعد آخرش به ۳ رقم اعشار گرد کنید

تمرین ۲: مقدار تقریبی $x = \frac{\pi}{3\sqrt{5}}$ تا ۳ رقم اعشار (3D)

اگر از فرمول خطای تقسیم نبرم، باید دوباره برای مخرج اول، از فرمول خطای ضرب برم.
برای همین همیشه تقسیم را به ضرب تبدیل می‌کنند.

$$x = \frac{1}{3} \times \pi \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{3} \times \pi \times \frac{1}{5} \times \sqrt{5} = \frac{1}{3} \times \pi \times 0.2 \times \sqrt{5}$$

$$A = 0.2 = 0.2 + E_A \qquad E_A = 0$$

$$B = \frac{1}{3} = 0.333 + E_B \qquad E_B = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$C = \pi = 3.142 + E_C \qquad E_C \leq 0.5 \times 10^{-3}$$

$$D = \sqrt{5} = 2.236 + E_D \qquad E_D \leq 0.5 \times 10^{-3}$$

$$x = 0.2(0.333)(3.142)(2.236) + E_{ABCD}$$

$$= (\qquad\qquad) + E_{ABCD}$$

فرمول مشتق را می‌نویسیم

تعمیم ۴ متغیره: $E_{ABCD} \leq abcE_D + acdE_B + bcdE_A + abdE_C$

باز خود abc چون بیشتر از سه رقم اعشار می‌شه، باید خطای گرد کردنش را در نظر بگیریم. این گاه خوب نیست

استفاده از فرمول ضرب برای n تا متغیر، کار را ساده‌تر می‌کند. A_n ... $x = \pi^n = A_1 A_2$ مثال

مثال ۱۶: $V = \pi r^2 h$ سطح جانبی $S = 2\pi r h$

$$\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ h = e \end{cases}$$

در این دو مثال، تابع $f(x) = x^n$ و $f(x,y,z) = xy^2z$ را در نظر می‌گیریم. خطایش در نقطه π و
را حساب می‌کنند.

$x = \pi$
$y = \sqrt{2}$
$z = e$

$$\text{خطای ضرب} \leq \varepsilon_1 (y^2 z) + \varepsilon_2 (2xyz) + \varepsilon_3 (xy^2)$$

* خطای محاسبه توابع و فرمول ها:

اگر بخواهیم مقدار تابع $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را در نقطه $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ بیابیم، در حالتی که تنها تقریبی از آن باشد (خطا) $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ معلوم است.

خطای مطلق متغیر

$x_i = a_i + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad , \quad \varepsilon_i = e(a_i)$

مثال: $x = a + \varepsilon$ و تابع $f(x)$

$$f(x) = f(a+\varepsilon) \overset{\text{بسط تیلور}}{\underset{\text{a حول نقطه}}{=}} f(a) + \varepsilon f'(a) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(a) + \dots$$

اگر از جمله $\frac{\varepsilon^2}{2!}$ به بعد، بتوان صرف نظر کرد

$$f(x) - f(a) = \varepsilon f'(a) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(a) + \dots$$

یک متغیره / خطای محاسبه تابع / خطای مطلق

فرمول یک

$$\boxed{E_f = |f(x) - f(a)| \cong |\varepsilon f'(a)| < \overset{\text{خطای حدی}}{e_a} |f'(a)|}$$

خطای نسبی تابع یک متغیره

$$\boxed{\delta(f) \cong \frac{E_f}{|f(a)|} = \frac{|f(x) - f(a)|}{|f(a)|} \cong \frac{e(a)}{|f(a)|} |f'(a)|}$$

کمینه $\delta(a) \cong \frac{e(a)}{|a|}$

یا

$\delta(a) \cong \frac{e_a}{|a|}$

$\delta(a)$ را می سازیم با ضرب و تقسیم بر a

فرمول دو

$$\boxed{= \delta(a) \left| \underbrace{\frac{a f'(a)}{f(a)}}_{\text{عدد حالت}} \right|}$$

برای n متغیر هم باید بسط تیلور n متغیر را بنویسید:

پس در حالت کلی، اگر $x_i = a_i + \varepsilon_i$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(a_1 + \varepsilon_1, a_2 + \varepsilon_2, \dots, a_n + \varepsilon_n)$$

$$\overset{\text{بسط تیلور}}{\underset{\text{n متغیره}}{=}} f(a_1, \dots, a_n) + \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) + \dots + \varepsilon_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n)$$

مشتقات مراتب بالاتر هم دارد (معمولاً حذفش می کنند)

فرمول

$$\boxed{E_f = |f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)| \leqslant \varepsilon_1 \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n)\right| + \dots + \varepsilon_n \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n)\right|}$$

خطای تابع n متغیره

این چیزی که بدست اومد همون تعریف دیفرانسیله دیگه. قبلاً مثل داشتیم $w = f(x_1 \dots x_n)$

$$\rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

پس برای ضرب بیشتر از ۲ متغیره باید تابع تعریف کنید.

$$A = \sqrt{2}\, \pi^5 e^3 \longrightarrow f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^5 x_3^3$$

مثال (امتحان ترم قبل): مطلوبست حجم یک کره به شعاع $\frac{5}{3}$ m و محاسبه کران خطا (محاسبات تا 3D)

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (x_1 = \tfrac{4}{3},\ x_2 = \pi,\ x_3 = R)$$

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3^3$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} = 1.333 + E_{x_1} & \varepsilon_1 = E_{x_1} \leqslant \frac{1}{2}10^{-3} \\ x_2 = \pi = 3.142 + E_{x_2} & \varepsilon_2 = E_{x_2} \leqslant '' \\ x_3 = R = \frac{5}{3} = 1.667 + E_{x_3} & \varepsilon_3 = E_{x_3} \leqslant '' \end{cases}$$

چون 3D

$$v = (1.333)(3.142)(1.667)^3 + E_v$$

بعد از گرد کردن تا ۳ رقم

$$= \underline{19.402} + E_v + \text{خطای گرد کردن تا 3 رقم}$$

گرد کرده پس خطاش رو

فرمول ← $E_v \leqslant \varepsilon_1 |x_2 x_3^3| + \varepsilon_2 |x_1 x_3^3| + \varepsilon_3 |3 x_1 x_2 x_3^2|$

خواسته باشه با مقدار تقریبیه

$$\leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-3} \left[(3.142 \times 1.667^3) + (1.333 \times 1.667^3) + 3(1.333)(3.142)(1.667)^2 \right]$$

فاکتور برای همه

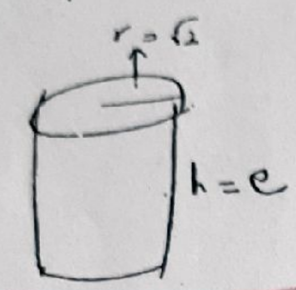
یعنی دوباره از سه رقم اعشار بیشتره ولی اگر خطای گرد کردن را حساب نمی‌کنیم (برا محاسبات داخل) دیگه همه را حساب نمی‌کنیم. آخر تا 5D گردش می‌کنیم.

$$= 2.782 \times 10^{-2}$$

خطای گرد کردن + E_2 = ~~حداکثر خطا~~

$$\leqslant 2.782\times 10^{-2} + \frac{1}{2}\times 10^{-3} = \varepsilon$$

$$\longrightarrow |V - 19.4021| \leqslant \varepsilon$$



حالا مساحت جانبی کل را حساب کنید.

فصل دوم: حل معادلات غیرخطی - یافتن ریشه های معادله $f(x)=0$

خود α را نمی‌توانید بدست بیاورید ←

تعریف: α را ریشه معادله $f(x)=0$ نامیم هرگاه $f(\alpha)=0$

تعریف: α را ریشه تکراری مرتبه k ام معادله $f(x)$ نامیم هرگاه $f(x)=(x-\alpha)^k g(x)$ و $g(\alpha)\neq 0$ ، $1\leqslant k$

ریشه‌ی این را حساب کنید $e^{-x^2}+\operatorname{tg}x=0$ ← معمولی حل نمی‌شه. باید عددی حل اش کنید.

در حالت $k=1$: ریشه را ریشه ساده می‌نامیم.

(این تجزیه کردنه، کار سختیه دیگه. مثلاً برای $x-\sin x=0$)

برای سخت بودن تجزیه کردن، گفته‌اند از فرم زیر استفاده کنید:

در حالت دیگر، α را ریشه مرتبه k ام معادله $f(x)=0$ نامیم

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=\dots=f^{(k-1)}(\alpha)=0 \;,\; f^{(k)}(\alpha)\neq 0$$

چون $f' = k(x-\alpha)^{k-1}g(x)+(x-\alpha)^k g'(x)$

مثال: $f(x)=x-\sin x$ ، $\alpha=0$ یک ریشه معادله است. می‌خواهیم ببینیم مرتبه‌اش چنده؟

می‌ریم جلو تا مشتقش صفر نباشه

$f(0)=0$

$f'(x)=1-\cos x \rightarrow f'(0)=0$

$f''(x)=\sin x \rightarrow f''(0)=0$

$f'''(x)=\cos x \rightarrow f^{(3)}(0)\neq 0 \longrightarrow$ پس $\alpha=0$، ریشه مرتبه $k=3$ است