طبیعی است که در یک مساله خاص، بعضی از خطاها حذف شده و برخی دیگر اثری ناچیز در نتیجه نهایی داشته باشند، ولی بطور کلی یک تحلیل کامل بایستی هرنوع خطایی را شامل گردد. در ادامه خطاهای مربوط به عملیات را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

٤-خطای چهار عامل اصلی

خطای حاصل جمع : فرض کنید b, a تقریب‌هایی از B, A و این اعداد همگی مثبت باشند. همچنین فرض کنید e_a و e_b به ترتیب خطاهای مطلق حدی b, a باشند. اگر e_c خطای مطلق حدی $\mathrm{C} = A + B$ باشد در این صورت

$$e_c \leq e_a + e_\mathrm{b}$$

خطای تفاضل : با مفروضات موجود در خطای حاصل جمع هرگاه $\mathrm{C} = A - B$ داریم

$$e_c \leq e_a + e_\mathrm{b}$$

مثال ۳ : هرگاه اعداد π و $\sqrt{2}$ را تا چها رقم اعشار گرد کنیم، مطلوب است محاسبهٔ $\pi \pm \sqrt{2}$ و محاسبه حداکثر خطای حاصل جمع و تفاضل.

حل: داریم

$$\pi = 3.1416 + e_1 \qquad , \qquad \sqrt{2} = 1.4142 + e_2$$

چون اعداد تا چهار رقم اعشار گرد شده‌اند پس

$$e_1 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \qquad , \qquad e_2 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

بنابراین داریم

$$\pi + \sqrt{2} = (3.1416 + 1.4142) + e_3 = 4.5558 + e_3$$

که در آن با استفاده از رابطه مربوط به خطای حاصل جمع داریم

$$e_3 \leq e_1 + e_2 \qquad , \quad e_3 \leq \left(\frac{1}{2} \times 10^{-4}\right) + \left(\frac{1}{2} \times 10^{-4}\right) = 10^{-4}$$

لذا

$$4.5558 - 10^{-4} \leq \pi + \sqrt{2} \leq 4.5558 + 10^{-4}$$

$$4.5557 \leq \pi + \sqrt{2} \leq 4.5559$$

به طور مشابه خطای حدی $\pi - \sqrt{2}$ کوچکتر یا مساوی 10^{-4} بوده و داریم

$$1.7273 \leq \pi - \sqrt{2} \leq 1.7275$$

توجه ٦ : خطای گرد کردن تا n رقم اعشار همواره کمتر یا مساوی $\frac{1}{2} \times 10^{-n}$ است.

خطای حاصل‌ضرب: اگر $\mathrm{C} = AB$ آنگاه

$$e_{\mathrm{c}} = ae_{\mathrm{b}} + \mathrm{b}e_a$$

توجه ٧ : در عمل تقسیم معمولا به گونه‌ای عمل می‌شود که تقسیم تبدیل به حاصل‌ضرب گردد. مثال ٥ این مطلب را نشان می‌دهد.

مثال ٤ : مقدار$\pi\sqrt{2}$ را با چهار رقم اعشار محاسبه نموده و حداکثر خطای این حاصل‌ضرب را بدست آورید.

حل: داریم

$$\pi = 3.1416 + e_1 \quad , \quad \sqrt{2} = 1.4142 + e_2$$

که در آن $e_1 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$ ، $e_2 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$ و داریم

$$\pi\sqrt{2} = (3.1416 \times 1.4142) + \mathrm{e}_3$$

حال بنا بر رابطه مربوط به خطای حاصل‌ضرب برای e_3 داریم

$$e_3 \leq 3.1416 \ e_2 + 1.4142 e_1$$

$$e_3 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}(3.1416 + 1.4142)$$

$$e_3 \leq 2.2779 \times 10^{-4}$$

اما $\pi\sqrt{2} = 4.4429 + e'_3$. زیرا حاصل‌ضرب اعداد 3.1416 و 1.4142 در محاسبه $\pi\sqrt{2}$ بیش از چهار رقم اعشار دارد، لذا هنگام نمایش حاصل‌ضرب دو عدد مذکور با چهار رقم اعشار، خطای دیگری مرتکب شده‌ایم. لذا خطای حدی کل را با e'_3 نشان داده‌ایم. برای $\acute{e}_3$ داریم

$$\acute{e}_3 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} + e_3$$

$$\acute{e}_3 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} + 2.2779 \times 10^{-4} = 2.7779 \times 10^{-4}$$

لذا

$$4.4426 \leq \pi\sqrt{2} \leq 4.4432$$

حداکثر خطا در حاصلضرب سه عدد حقیقی: هر گاه c,b,a تقریب‌هایی از C,B,A بوده، و این اعداد همگی مثبت باشند رابطه زیر را برای مطلق حدی حاصل‌ضرب abc به عنوان تقریبی از ABC داریم

$$e_{abc} \leq a\mathrm{b}e_{\mathrm{c}} + a\mathrm{c}e_{\mathrm{b}} + \mathrm{bc}e_{a}$$

مثال ۵ : هرگاه اعداد را تا سه رقم اعشار گرد کنیم، عبارت $\frac{\pi}{3\sqrt{5}}$ را محاسبه نموده و یک خطای مطلق حدی برای این محاسبه بدست بیاورید.

حل: قرار دهید $x = \frac{\pi}{3\sqrt{5}}$. لذا

$$x = \pi \, . \frac{1}{3} \, . \frac{1}{\sqrt{5}} = \pi . \frac{1}{3} \, . \frac{1}{5} \, . \sqrt{5}$$

$$= \pi \, . \frac{1}{3} \, . (0.2) \sqrt{5} = (0.2)\pi \, . \frac{1}{3} \sqrt{5}$$

مقدار 0.2 بطور دقیق مشخص است. چون اعداد را تا سه رقم اعشار گرد می‌کنیم داریم

$$\pi = 3.142 + e_{\pi} \quad , \quad e_{\pi} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$\sqrt{5} = 2.236 + e_{\sqrt{5}} \quad , \quad e_{\sqrt{5}} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$\frac{1}{3} = 0.333 + e_{\frac{1}{3}} \quad , \quad e_{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

و از آنها داریم

$$x = (0.2)3.142 \times 2.236 \times 0.333 + e_{x}$$

$$x = 0.468 + \acute{e}_{x}$$

باید توجه داشته باشید که چون حاصل‌ضرب اعداد فوق بیشتر از سه رقم اعشار دارد، هنگام نمایش این حاصل‌ضرب‌ها، با سه رقم اعشار، خطای دیگری را مرتکب می‌شویم که خطای حدی را با $\acute{e}_x$ نشان داده‌ایم. در واقع داریم

$$\acute{e}_x \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3} + e_x$$

بنابر رابطه مربوط به خطای حاصل‌ضرب سه عدد حقیقی برای e_x داریم

$$e_x \leq 0.2 \left[2.236 \times 0.333 e_\pi + 3.142 \times 0.333 e_{\sqrt{5}} + 3.142 \times 2.236 e_{\frac{1}{3}}\right]$$

$$e_x \leq 8.816 \times 10^{-4}$$

لذا

$$\acute{e}_x \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3} + 8.816 \times 10^{-4}$$

$$\acute{e}_x \leq 1.382 \times 10^{-3}$$

۵–خطای محاسبه فرمول‌ها و توابع

خطای محاسبه فرمول‌ها: هرگاه تابعی n متغیره به صورت $y = f(x_1, \dots x_n)$ داشته باشیم و بخواهیم مقدار این تابع را در نقاط $A_i = a_i + e_{a_i}$ برای $i = 1, \dots, n$ حساب کنیم، در این صورت خواهیم داشت

$$f(A_1, A_1, \dots, A_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) + e_f$$

که در آن

$$e_{\mathrm{f}} \leq \mathrm{e}_{a1} \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_1}\Big|a \ + e_{a_2} \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_2}\Big|a \ + \cdots + e_{a_n} \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_n}|a$$

در رابطه فوق منظور از a بردار مقادیر تقریبی a_i یعنی $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ است.

همچنین $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_i}|a$ به معنی محاسبه مقدار تابع $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_i}$ به ازای بردار a است.

مثال ٦ : حجم کره‌ای به شعاع $\frac{5}{3}$ متر را محاسبه کرده و حداکثر خطای این محاسبه را بدست آورید. این اعداد را تا چهار رقم اعشار گرد کنید.

حل: داریم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ یا $V = xyz^3$ که در آن

$$x = \frac{4}{3} = 1.3333 + e_x \qquad , \qquad e_x \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$$\mathrm{y} = \pi = 3.1416 + \mathrm{e_y} \qquad , \qquad \mathrm{e_y} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$$z = \frac{5}{3} = 1.6667 + e_z \qquad , \qquad e_z \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$$V = (1.3333)(3.1416)(1.6667)^3 + e_v$$

$$= 19.3933 + \acute{e}_v$$

که در آن مشابه مثال‌های قبل داریم

$$e'_v \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} + e_v$$

$$e_v \leq e_x \frac{\partial v}{\partial x} + e_y \frac{\partial v}{\partial y} + e_z \frac{\partial v}{\partial z}$$

که عبارت سمت راست را بایستی در نقطه $(1.3333,3.1416,1.6667)$ محاسبه کرد. لذا

$$e_v \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \{ \mathrm{yz}^3 + \mathrm{xz}^3 + 3\mathrm{xyz}^2 \}$$

$$e_{\mathrm{v}} \leq \ 0.0028$$

$$e'_v \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \times 0.0028$$

$$e'_v \leq 0.00285$$

$$e'_v \leq 0.0029$$

در نتیجه $V = 19.3933 + 0.0029$.

خطای محاسبه توابع: در اکثر محاسبات تابعی نیاز به محاسبات توابعی مانند $\sqrt{\mathrm{x}}, \sin \mathrm{x}, \ln\mathrm{x}$, ... در دامنه تعریف آنها پیش می‌آید. در محاسبه این توابع علاوه بر خطای موجود در نمایش x به شکل اعشاری و با تعداد متناهی رقم، خطای دیگری نیز وارد می‌شود که ذیلا آن را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید می‌خواهیم مقدار $e^{\frac{1}{3}}$ را محاسبه کنیم. می‌دانیم

$$e^{\mathrm{x}} = 1 + \frac{\mathrm{x}}{1!} + \frac{\mathrm{x}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathrm{x}^\mathrm{n}}{\mathrm{n}!} + \cdots$$

مقدار $e^{\frac{1}{3}}$ یعنی مقدار سری واقع در سمت راست تساوی بالا به ازای $x = \frac{1}{3}$. چون محاسبه جمع بینهایت جمله (عدد) عملا امکان‌پذیر نیست، معمولا تعدادی متناهی از جملات نخست این سری را متناسب با دقت لازم انتخاب و به ازای $x = \frac{1}{3}$ یا تقریب مناسبی از $\frac{1}{3}$ محاسبه می‌شود. در واقع می‌نویسیم

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x)$$

که در آن

$$E_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots$$

$E_n(x)$ باقیمانده سری یا خطای برشی در x نامیده می‌شود. حال فرض کنید که $e^{\frac{1}{3}}$ را با خطای کمتر از 10^{-3} بخواهیم. قرار می‌دهیم $|E_n(x)| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$ (به ضریب $\frac{1}{2}$ در سمت راست عبارت فوق توجه کنید. چون باید $x = \frac{1}{3}$ را به صورت تقریبی بنویسیم که آن هم دارای خطای $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$ است).

برای محاسبه n معمولا از اولین جمله $E_n(x)$ استفاده می‌کنیم. یعنی قرار می‌دهیم

$$E_n(x) \cong \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

بنابراین برای محاسبه $e^{\frac{1}{3}}$ با خطای کمتر از 10^{-3} قرار می‌دهیم

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

برای $n = 3$ نامساوی فوق برقرار نیست اما برای $n \geq 4$ برقرار است. لذا مقدار $n = 4$ را برگزیده و $e^{\frac{1}{3}}$ با خطای کمتر از 10^{-3} به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$e^{\frac{1}{3}} \cong \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{9}}{2} + \frac{\frac{1}{27}}{6} + \frac{\frac{1}{81}}{24} = 1.3956$$

و بنابراین با سه رقم اعشار داریم

$$e^{\frac{1}{3}} \cong 1.396$$