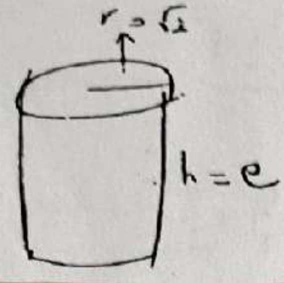
حداکثر خطا $= E_r +$ خطای گرد کردن

$$< 2.782\times10^{-2} + \frac{1}{2}\times10^{-3} = \varepsilon$$

$$\longrightarrow |V - 19.402| < \varepsilon$$



حالا مساحت کل جانبی را حساب کنید:

فصل دوم: حل معادلات غیرخطی - یافتن ریشه های معادله $f(x)=0$

خودش را نمی توانیم درست بیاوریم ←

تعریف: α را ریشه معادله $f(x)=0$ نامیم هرگاه $f(\alpha)=0$

تعریف: α را ریشه تکراری مرتبه k ام معادله $f(x)$ نامیم هرگاه $f(x)=(x-\alpha)^k g(x)$ ، $g(\alpha)\neq 0$ ، $1\le k$

ریشه، این را حساب کنید $e^{-x^2}+\tan x=0$ ← معمولی حل نمی شه. باید عددی حل اش کنید

در حالت $k=1$: ریشه را ریشه ساده می نامیم.

(این تجزیه کردنه، کار سختیه دیگه. مثلاً برای $x-\sin x=0$)

برای سخت بودن تجزیه کردن، گفته، از فرم زیر استفاده کنید:

در حالت دیگر، α را ریشه مرتبه k ام معادله $f(x)=0$ نامیم

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=\dots=f^{(k-1)}(\alpha)=0 \quad , \quad f^{(k)}(\alpha)\neq 0$$

چون $f'=k(x-\alpha)^{k-1}g(x)+(x-\alpha)^k g'(x)$

مثال: $f(x)=x-\sin x$ ، $\alpha=0$ یک ریشه معادله است. می خواهیم ببینیم مرتبه اش چنده؟

می ریم جلو تا مشتقش صفر نباشه

$f(0)=0$

$f'(x)=1-\cos x \rightarrow f'(0)=0$

$f''(x)=\sin x \rightarrow f''(0)=0$

$f'''(x)=\cos x \rightarrow f^{(3)}(0)\neq 0 \longrightarrow$ پس $\alpha=0$ ، ریشه مرتبه $k=3$ است

معادله $x - \tan x = 0$ فقط در $(-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2})$ جواب داره. یعنی محدوده حساب می‌کنیم.

مقدار و تعیین محل تقریبی ریشه‌ها:

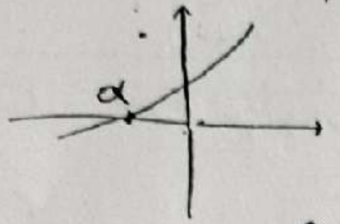
الف) رسم منحنی: معادله‌ای که شکلش رو بتوانیم رسم کرد. ساده باشه.

برای معادلات سخت، هیچگاه استفاده نمی‌شه

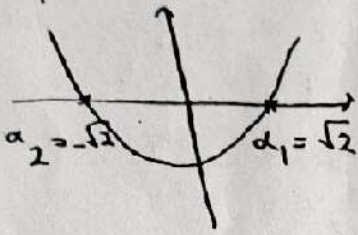
$y = f(x)$

$A \left| \begin{matrix} \alpha \\ 0 \end{matrix} \right.$

حتماً باید روی نمودار باشه



مثال: $x^2 - 2 = 0$



می‌گویند تابع $f(x)$ را می‌توان رسم کرد، اگر بتوان تابع $f(x)$ را به صورت زیر نوشت

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

که شرطش اینست که $f_1(x)$ و $f_2(x)$ را بشود رسم کرد.

اثبات: اگر α ریشه $f(x) = 0$ باشه

$$f(\alpha) = f_1(\alpha) - f_2(\alpha) = 0$$
$$\longrightarrow f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = B$$

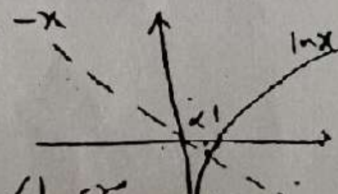
نقطه‌ای پیدا کردند به مختصات $\left| \begin{matrix} \alpha \\ B \end{matrix} \right.$ که در هر دو منحنی $f_1(x)$ و $f_2(x)$ صدق کرده پس

نقطه $A = \left| \begin{matrix} \alpha \\ B \end{matrix} \right.$ باید نقطه تلاقی دو نمودار $f_1(x)$ و $f_2(x)$ باشه.

مثال: $f(x) = x + \ln x$

$$f(x) = \ln x - (-x) \longrightarrow \begin{cases} f_1(x) = \ln x \\ f_2(x) = -x \end{cases}$$

رسم می‌کنیم به صورت ترسیمی، محل تلاقی را پیدا می‌کنیم

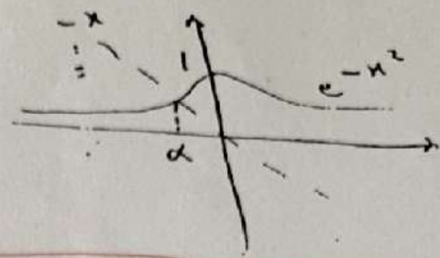


پس $0 < \alpha < 1$ یعنی محدوده‌ای به α پیدا می‌کنیم

مثل: $f(x)=e^{-x^2}+x$

$f(x)=e^{-x^2}+x=0$

$=e^{-x^2}-(-x)=0$



تمرین شما: تعداد و محل تقریبی ریشه های $x\sin x-1=0$ را بیابید

سوال امتحانی: ثابت کنید معادله $x-\tan x=0$ در بازه $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ فقط یک ریشه دارد.

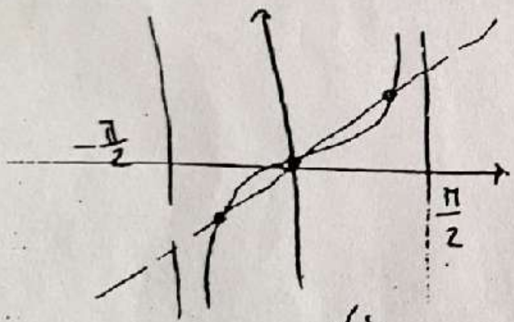
$x\sin x-1=0 \iff \sin x-\frac{1}{x}=0$

طرفین را به x تقسیم می‌کنم. چون که دانم $x=0$ ریشه نیست.

سر امتحان، موارد زیر رو بد می‌کشند. جوابتون اشتباه می‌شه.

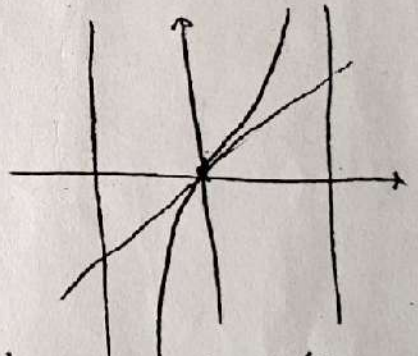
$0<x<\pi/2$: $x<\tan x$

$x>\sin x$



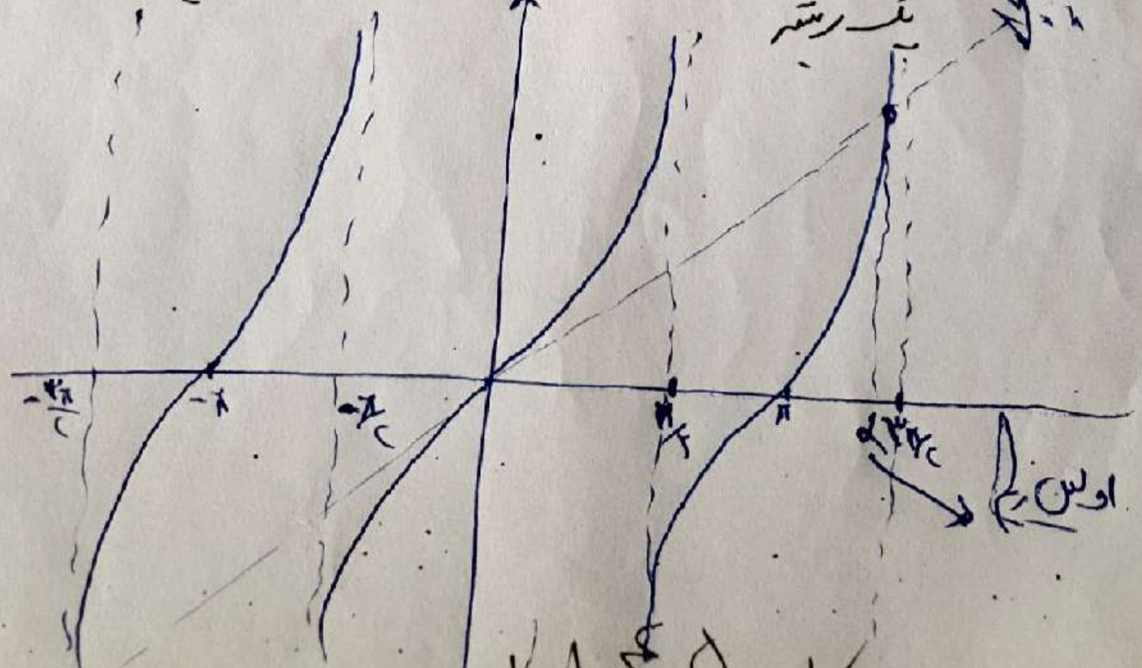
شکل درست

۳ ریشه



شکل اشتباه معمول شما

یک ریشه



۲۰۸۴۵۰۷

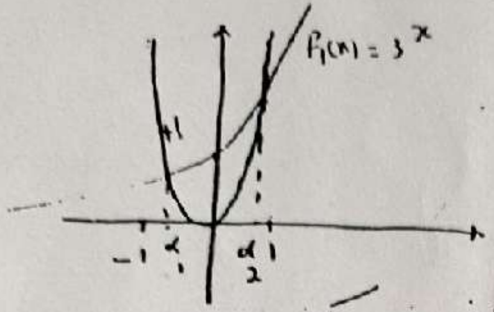
جلسه چهارم :

مثال : مطلوبست تعیین حدود ریشه های $f(x)=3^x-4x^2=0$

الف) رسم منحنی : اینجا چون نمی توانیم به صورت دو تابع قابل رسم ، تلاقی بدهیم ، بر بر می خوریم.

$f_1(x)=3^x$

$f_2(x)=4x^2$



$-1<\alpha_1<0$ → ریشه بین ۰ و ۱-

$0<\alpha_2<1$ → بین ۰ و ۱ را همیشه کنترل می کنیم

$3<\alpha_3<4$

از روی شکل سخته این رو بگی. این روش فقط امکان را راهنمایی می کند

ب) جدول بندی مقادیر تابع : $f(a)f(b)<0 \Rightarrow a<x<b$

f پیوسته

$f(3)=27-36<0$

$f(4)=3^4-64>0$

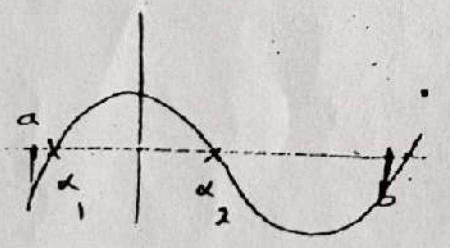
→ یک ریشه بین 3 و 4 وجود دارد

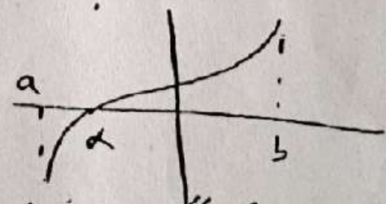
راه دیگه نگفته ام؟! الان می گم | Eydoon...

ب) جدول بندی مقادیر تابع :

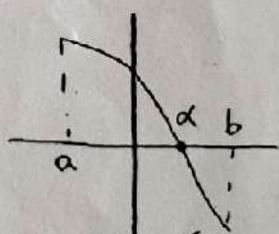
اگر تابع f بر $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<0$ در این صورت $a<\alpha<b$ موجود است که $f(\alpha)=0$ و اگر f اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) باشد ، ریشه α یکتاست.

این قضیه فقط وجود ریشه رو اثبات می کنه. نمی گه تعدادش چندتاست.





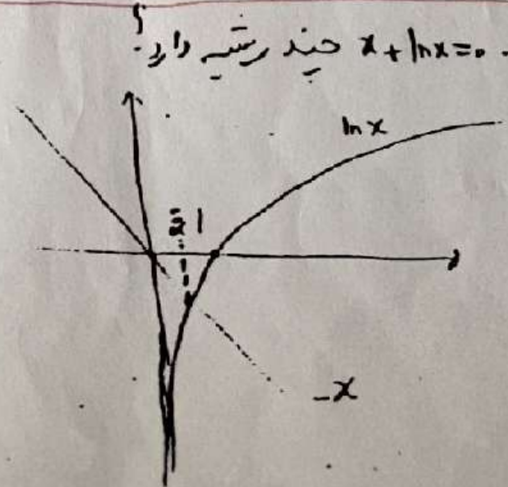
اکیداً صعودی (فقط یک ریشه)



اکیداً نزولی

مثال : معادله $x+\ln x=0$ چند ریشه دارد؟

$f(x)=\ln x-(-x)$



① رسم منحنی :

$0<\alpha<1$

$f(1) = 1 > 0$

$f(0)$ ✗ نمی‌توانیم بنویسیم چون مقدارش درست نمی‌آید.

② جدول‌بندی

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

$\frac{1}{e}$ که نگذاریم، ماشین حساب هم می‌تواند. یعنی می‌توانید ۰.۵ بگذارید، فرقی نمی‌کند. فقط ماشین حساب می‌خواهد.

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ اکیداً صعودی

حتماً صعودی بودن را هم باید بنویسید:

البته ریشه‌های $e^{-x^2} - (-x \ln x) = 0$ و $e^{-x^2} - \tan x = 0$ را بهتر است با همان شکل بروید.

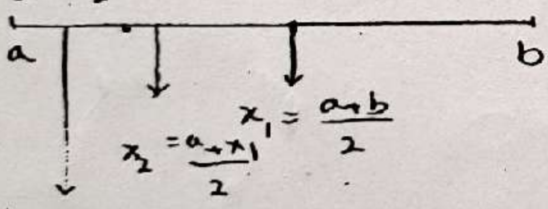
✱ الگوریتم‌های عددی برای تقریب ریشه α:

در هر یک از روش‌ها و الگوریتم‌های زیر، دنباله‌ای از اعداد مانند $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ می‌سازیم به طوری که: $\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$ یا $\lim_{n \to +\infty} (x_n - \alpha) = 0$

$\boxed{\text{① روش دوبخشی یا نصف کردن}}$:

در این روش فرض می‌کنیم معادله در بازه $[a,b]$ تنها یک ریشه داشته باشد.

این روش اگر دو ریشه‌ای داشته باشد به دردمان نمی‌خورد. پس مشخص کنیم که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد.



$x_1 = \frac{a+b}{2}$

$x_2 = \frac{a+x_1}{2}$

$x_3 = \frac{a+x_2}{2}$

$f(a) f(b) < 0 \rightarrow \alpha \in (a,b)$

$f(a) f(x_1) < 0 \rightarrow \alpha \in (a,x_1)$

$f(a) f(x_2) < 0 \rightarrow \alpha \in (a,x_2)$

این روش حتماً به جواب می‌رسد چون $\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$ را ارضا می‌کند.

پس الگوریتم این می‌شود:

1) قرار دهید $n = 1$

2) $x_n = \frac{a+b}{2}$

3) اگر $f(a) f(x_n) = 0$ در این صورت x_n ریشه است. خیلی دقت کنید

4) اگر $f(a) f(x_n) < 0$ در این صورت ریشه در بازه (a, x_n) قرار دارد، قرار دهید $b = x_n$ و $n = n+1$ و به ۲ بروید.

5) اگر $f(a) f(x_n) > 0$ " " " " (x_n, b) " " $a = x_n$ " " "

~~x_n~~ x_n گویاست ولی α گنگ. الگوریتم را تکرار کنیم، x_n برابر α نمی‌شه. چون مثلاً در $f(x) = x^2 - 2 = 0$ که $\alpha = \sqrt{2}$. هر چه تکرار کنیم برابر نمی‌شه. ولی اختلافش کم

شرایط توقف الگوریتم (چون میرویم به گام 3 نمی‌رسیم، حلقه ما تمام می شود)

1) $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$: (ε معلوم) $\longrightarrow$ x_n تقریبی از α

یا

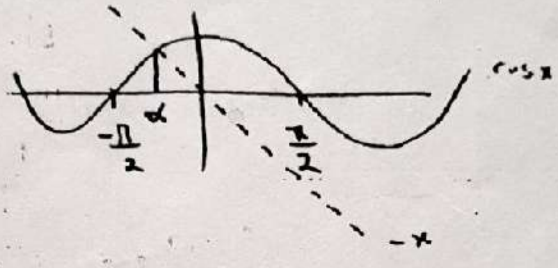
2) $|f(x_n)| < \varepsilon$

یا

3) $n = M$ (الگوریتم M بار تکرار شود) $x_1 \cdots x_M$

مثال: مطلوبست تقریبی از ریشه معادله $x + \cos x = 0$ به کمک روش دوبخشی تا 3 تکرار

$f(x) = \cos x - (-x)$



$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ از روی شکل می فهمیم

(در cos به صورت رادیان)

$f(-1) = -0.46 < 0$

$f(0) = 1 > 0$ $\longrightarrow$ $-1 < \alpha < 0$ که $f(\alpha) = 0$ کار با -1 از کار با $-\frac{\pi}{2}$ راحت‌تر

همچنین $f'(x) = 1 - \sin x > 0$ $\longrightarrow$ در بازه $(-1, 0)$ اکیداً صعودی است.

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(a)\,f(x_n)$
1	-1	0	-0.5	$-$ گام شماره 4، ... منفی
2	-1	-0.5	-0.75	$+$ گام شماره 5، ... مثبت
3	-0.75	-0.5	$\boxed{-0.625}$	

پس $\alpha \cong x_3 = -0.625$

اگر تکرار بیشتر خواهید، حلقه for باید بنویسید.

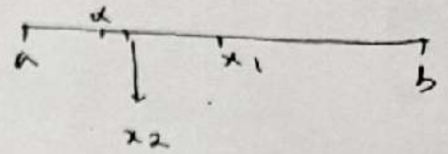
روش دوبخشی همواره همگراست با توجه به نحوه ساختن $\{x_n\}$ ها

$$0<|x_1-\alpha|<\frac{b-a}{2}$$

$$0<|x_2-\alpha|<\frac{b-a}{2^2}$$

$$\vdots$$

$$0<|x_n-\alpha|<\frac{b-a}{2^n}$$



حد طرفین قضیه فشردگی :

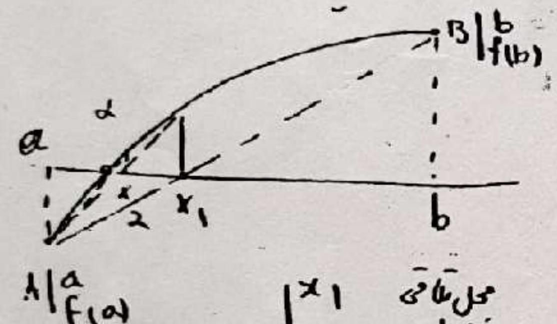
$$\lim_{n\to+\infty}|x_n-\alpha|=0$$

---

② روش نابجایی :

مشابه با شرایط روش دوبخشی اگر معادله $f(x)=0$ تنها یک ریشه در $[a,b]$ داشته باشد:

از طریق ~~...~~ معادله خط، کار می‌کند.



معادله خط AB $\quad y-f(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$\begin{vmatrix}x_1\\0\end{vmatrix}$ محل تلاقی خط با محور x ها $\longrightarrow 0-f(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_1-a)$

$$\longrightarrow x_n=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} \qquad n=1$$

اگر $f(a)f(x_n)=0 \leftarrow x_n$ ریشه است

اگر $f(a)f(x_n)<0$ در این صورت ریشه در بازه (a,x_n) قرار دارد، قرار دهید $b=x_n$ و $n=n+1$

اگر $f(a)f(x_n)>0$ " " " " " (x_n,b) " " " " $a=x_n$ و $n=n+1$

شرایط توقف الگوریتم هم مشابه شرایط توقف روش نصف کردن است.

:

این روش، محاسباتش زیاده. این ایراد عمومی‌اش است. (هر رتبه، 5 بار جمع و ضرب و تقسیم می‌کرد) همچنین اگر مخرج کسر ~~...~~ کوچک شود، مثلاً برای 3D باید با 2D کار کنیم.

حتماً در امتحان می‌آید. مهم است

③ روش نقطه ثابت یا تکرار ساده :

در این روش معادله $f(x)=0$ به صورت $x=g(x)$ نوشته می‌شود. طوریکه α ریشه هر دو معادله باشد: $\alpha=g(\alpha)$, $f(\alpha)=0$

در ابتدا از بدیهی‌ترین شکل‌های ممکن

$$\begin{cases} x = x + f(x) = g(x) \\ x = x - f(x) = g(x) \end{cases}$$

از بی‌نهایت حالت

مثال : $x+\cos x=0$ که $x=-\cos x=g_1(x)$

مثال : $\cos x = x$ که $x=\operatorname{Arccos}(-x)=g_2(x)$

مثال : ریشه $3^x-4x^2=0$ چه می‌شود؟

$$4x^2=3^x \longrightarrow x^2=\frac{3^x}{4} \longrightarrow x=\frac{\sqrt{3^x}}{2}=g_1(x) \quad , \quad x=-\frac{\sqrt{3^x}}{2}=g_2(x)$$

$0<\alpha_1<1$, $0<\alpha_2<1$

$$4x^2=3^3 \longrightarrow \log_3 4x^2=\log_3 3^x \longrightarrow x=\log_3 4+2\log_3 x=g_3(x)$$

$3<\alpha_3<4$

$$\alpha \cong x_0 \xrightarrow{\text{از حلقه}} x_1=g(x_0) \longrightarrow x_2=g(x_1) \rightarrow \cdots \rightarrow x_{n+1}=g(x_n)$$

α تقریبی از ریشه

البته با هر $g(x)$ ای و با هر تقریبی از ریشه، نمی‌توان به جواب رسید. شرایطش را جلسه بعد می‌گم. اصلاً $g(x)$ را خود سوال ممکنه بده.

جلسه پنجم :

یادآوری روش نقطه ثابت : ← این روش و روش نیوتن به احتمال ۹۰ درصد در امتحان سوال می‌دهند.

$f(x)=0 \longrightarrow x=g(x)$

$f(\alpha)=0 \longrightarrow \alpha=g(\alpha)$

بوسیله رسم نمودار یا جدول‌بندی مقادیر تابع $x_0 \cong \alpha$ $\longrightarrow$ $n=0,1,2,\dots$ $x_{n+1}=g(x_n)$ رابطه بازگشتی

$x_1=g(x_0)$

$x_2=g(x_1)$

$\vdots$

تابع g بی‌نهایت فرم می‌تواند داشته باشد. در بعضی‌ها آسان‌ترین‌ها این است: $f(x)=0$

$x = x + f(x) = g_1(x)$

$x = x - f(x) = g_2(x)$

مثال: $e^x - 3x^2 = 0$

$-1 < \alpha_1 < 0$

$0 < \alpha_2 < 1$

$3 < \alpha_3 < 4$

$x^2 = \frac{e^x}{3} \longrightarrow x = \sqrt{\frac{e^x}{3}}\ ,\ x = -\sqrt{\frac{e^x}{3}}$

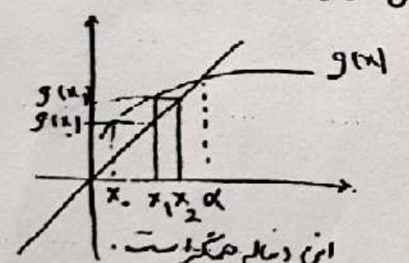
$e^x = 3x^2 \longrightarrow x = \ln(3x^2)$

$x_{n+1} = g(x_n) \quad n=0,1,2,\dots$

با توجه به نحوه ساختن دنباله $\{x_n\}$ به صورت همگرایی دنباله به انتخاب x_0 و $g(x)$ وابسته است.

نقطه ثابت: α را نقطه ثابت معادله $x=g(x)$ نامیم اگر $\alpha = g(\alpha)$.

تعبیر هندسی: $x=g(x) \longrightarrow x-g(x)=0 \longrightarrow \alpha$ محل تلاقی دو نمودار است $y=x$ و $y=g(x)$

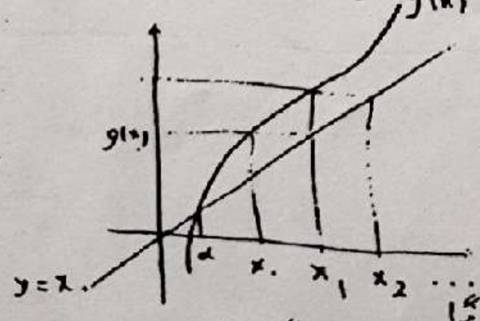


این دنباله همگراست.

دنباله بازگشتی می‌تواند همگرا باشد یا واگرا x_0

$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$



این دنباله واگراست.

اما این حالت را ببینید که دیگر همگرا نیست و واگراست. (اگر به راست
راست α بگیرید.)

شرایط انتخاب $g(x)$ و x_0

قضیه نقطه ثابت: اگر $g(x)$ و تابعی از $[a,b]$ توی $[a,b]$ باشد (یعنی دامنه و بردش یکی شود یعنی

$a \le x \le b \Rightarrow a \le g(x) \le b$ خود $[a,b]$ یا کوچکتر و داخلش

و $\max_{a \le x \le b} |g'(x)| \le L < 1$

در این صورت معادله $g(x)=x$ تنها یک ریشه α در بازه $[a,b]$ دارد.

همچنین دنباله تکراری ساخته شده به ازای هر $x_0 \in [a,b]$ دنباله $n=0,1,2,\dots$ ، $x_{n+1}=g(x_n)$ به ریشه α همگراست.

در امتحان می دهند معادله‌ای اینها رو داریم. به روش نقطه ثابت ریشه اش رو بدست بیاورید. ممکنه یک ریشه داشته باشه یا سه ریشه. (اما بد سوال را حساب نکنه.)

مثال امتحان ترم قبل: تقریبی از ریشه معادله $3xe^x = 1$ را به کمک روش نقطه ثابت (تکرار ساده) تا 3 تکرار بیابید.

$3xe^x - 1$

$$f(x) = 3xe^x - 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 3e-1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{پیوسته } f \quad \exists\, \alpha : 0 < \alpha < 1,\ f(\alpha)=0$$

الف) در منفی ها دنبال ریشه نیستیم چون $x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$

ب) $f'(x) = 3e^x + 3xe^x = 3e^x(1+x) > 0$.

در بازه $(0, +\infty)$ تابع اکیداً صعودی است.

تا اینجا معلوم شد که معادله فقط یک ریشه دارد و آن هم بین صفر و یک است. (اگر ثابت می‌شد دو ریشه داره، باید دو تا x و $g(x)$ می‌گرفتیم.) (اگر معادله سه ریشه داشته باشه و نگفته باشه که فقط بزرگترین ریشه مثبتش رو می‌خواد، باید تمام ریشه‌هاش رو پیدا کنید.) ← یک معنی ثابت وجود داشته باشه.

$g(x)$ را که می خواهند پیدا کنند، اول شرط دوم را چک می‌کنند $\mathrm{Max}\,|g'(x)| \leq L < 1$

بدیهی ترین g است. نباید ثابت کنم شرط‌ها را ارضا می‌کند. پس: $3xe^x = 1 \rightarrow x = \dfrac{1}{3e^x} = \dfrac{e^{-x}}{3} = g(x)$

پس باید اثبات کنیم: $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$

شرط دوم: $g'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{3} < 0 \rightarrow$ و تابع نزولی g.

چون تابع g نزولی است پس $\underset{0 \leq x \leq 1}{Max}\, g(x) = g(0) = \frac{1}{3}$

$\underset{0 \leq x \leq 1}{Min}\, g(x) = g(1) = \frac{e^{-1}}{3}$

پس $0 < \frac{1}{3e} \leq g(x) \leq \frac{1}{3} < 1$ یعنی $g([0,1]) \subset [0,1]$ پس شرط اول برقرار است.

(اثبات برای شرط اول) $\frac{1}{3e} \leq \frac{e^{-x}}{3} \leq \frac{1}{3} \leftarrow -1 \leq -x \leq 0 \leftarrow 0 \leq x \leq 1$ ... یا

راه دوم این ریاضی یک
جست اومش هم خودبخود هم درست شد:

$\underset{0 \leq x \leq 1}{Max} |g'(x)| = \underset{0 \leq x \leq 1}{Max} \frac{e^{-x}}{3} = \underset{0 \leq x \leq 1}{Max}\, g(x) \leq \frac{1}{3} < 1$ ✓

پس $x = g(x) = \frac{e^{-x}}{3}$
در ادامه گفته تا 3 تکرار جلو بروید:

$x_{n+1} = \frac{e^{-x_n}}{3} \qquad n = 0, 1, 2, 3$

$\forall x_0 \in [0,1]$

$x_0 = 0.5$ ← تقریب اولیه است

$x_1 = g(x_0) = \frac{e^{-x_0}}{3} = \frac{e^{-0.5}}{3} = \dots$

$x_2 = g(x_1) = \dots$

$x_3 = g(x_2) = \dots$ تعداد ارقام اعشار رو نگفته 3D یا 4D. اگر نگفتند تا 3D بگیرید.

مثال: ثابت کنید معادله $xe^{x^2} = 1$ یک ریشه در بازه $(0,1)$ دارد و سپس تقریبی از این ریشه را طوری بیابید که $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-2}$. (مسئله گفته بین $(0,1)$. اگر جای دیگری هم ریشه داشته باشه، کاری نداریم.)

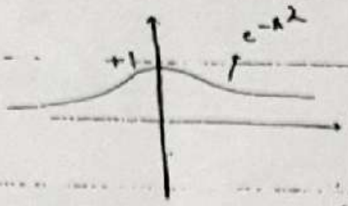
$xe^{x^2} = 1 \longrightarrow f(x) = xe^{x^2} - 1$

$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = e - 1 > 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[f(0)f(1) < 0]{f \text{ پیوسته}} \exists \alpha : 0 < \alpha < 1 \,,\, f(\alpha) = 0$

$\left\{\begin{array}{l} \text{(الف)} \quad x < 0 \longrightarrow f(x) < 0 \\ \text{(ب)} \quad f'(x) = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} = e^{x^2}(1 + 2x^2) > 0 \end{array}\right.$

در (الف و ب) معادله اکیدا صعودی و تنها یک ریشه دارد.

$x = \frac{1}{e^{x^2}} = e^{-x^2} = g(x)$



1) $g : [0,1] \to [0,1]$ باید اثبات کنیم

حل $0 \le x^2 \le 1 \to -1 \le -x^2 \le 0 \xrightarrow{\text{صعودی } e^x} e^{-1} \le e^{-x^2} \le e^0 = 1 \to 0 < \frac{1}{e} \le g(x) \le 1$

از این فرض استفاده کردیم که: اگر $a < x < b$ $\xrightarrow[\text{صعودی باشد}]{f}$ $f(a) \le f(x) \le f(b)$

2) $g'(x) = -2xe^{-x^2} \longrightarrow h(x) = |g'(x)| = 2xe^{-x^2}$

بقیه اش ریاضی ۱ است. برای بدست آوردن ماکزیمم، مشتق می‌گیریم:

$h'(x) = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(1-2x^2) = 0$

نقطه‌های اکسترمم را بدست بیاریم

$\longrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow h(x) \\ e^{-x^2} \neq 0 \end{cases}$ نقاط اکسترمم تابع $h(x)$: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\max_{0 \le x \le 1} |g'(x)| = \max_{0 \le x \le 1} 2xe^{-x^2} = \max_{0 \le x \le 1} h(x) \underbrace{\le h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\text{دقیقاً تعریف اکسترمم}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{e}} = 0.85 < 1$

پس شرایط تابع $g(x)$ برقرار بوده بنابراین

$\forall x_0 \in [0,1] \longrightarrow x_{n+1} = g(x_n) = e^{-x_n^2}$ به ریشه همگراست

اینجا شرط اتمام تا زمانی $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-2}$ شد

$x_0 = 0$

$x_1 = g(x_0) = g(0) = e^{-0} = 1 > 0.01 \longrightarrow$ باید ادامه بدهیم

$x_2 = g(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} > 0.01 \longrightarrow$ باید ادامه بدهیم

x_3

⋮

سر امتحان یک چیزی می‌دهند که مثلاً با ۳ تا منزل حل بشه.

اگر بین ۰ و ۱ دوتا ریشه وجود داشته باشه! باید دوتا $[a,b]$ بگیریم. یکبار $[0, 0.5]$ و یکبار $[0.5, 1]$

$0 \quad x_1 \quad 0.5 \quad x_2 \quad 1$

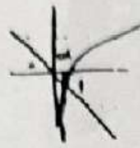
هرچه h کوچکتر شه، جواب دنباله نزدیکتر به جواب می‌رسد.

عده ای گفته بودند ... $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq e^{0} = 1 \longrightarrow |h(x)| < 1$

این کلاً غلط.

مثال: صورت مثال شکل مثال قبلی است. با معادله $x + \ln x = 0$

از نمودار معلوم است که ... در بازه صفر و یک



تعیین بازه مثلاً $[\frac{1}{e}, 1]$

یا اگر بخواهند معادله $e^x - 3x^2 = 0$

این معادله سه ریشه داره

$$\begin{cases} -1 < \alpha_1 < 0 & \text{بزرگترین ریشه منفی} \longrightarrow g_1(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{3}} \\ 0 < \alpha_2 < 1 & \text{کوچکترین ریشه مثبت} \longrightarrow g_2(x) = \sqrt{\frac{e^x}{3}} \\ 3 < \alpha_3 < 4 & \text{بزرگترین ریشه} \longrightarrow g_3(x) = \ln(3x^2) \end{cases}$$

برای همین حتماً یک سوال از نقطه ثابت می‌دهند. اکسترمم گیری و باید بلد باشید. تابع رو هم اگر سخت باشه، راهنمایی می‌کنند.

تمرین: برای تعیین ریشه $x^2 - 2 = 0$ از توابع تکراری $g_1(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g_2(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ استفاده شده است. نشان دهید روش نقطه ثابت برای هر یک از دو تابع $g_1(x)$ و $g_2(x)$ به ریشه α همگراست.

$1 < \alpha = \sqrt{2} < 2$

1 $\begin{cases} g_1 : [1,2] \longrightarrow [1,2] \\ g_2 : [1,2] \longrightarrow [1,2] \end{cases}$

سوالاتی که تحویلی است رو می‌نویسیم نقش. این رو برای خودتون حل کنید.