تعریف مرتبه همگرائی:

فرض کنیم دنباله $\{x_n\}$ به α همگرا باشد اگر اعداد مثبت P و λ موجود باشند که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^P}=\lambda$$

در این صورت P را مرتبه همگرائی دنباله $\{x_n\}$ نامیم.

برای n های خیلی بزرگ $|x_{n+1}-\alpha| \cong \lambda\,|x_n-\alpha|^P$

اگر فرض کنیم $\lambda \cong 1$ و $P=2$، در نتیجه $|x_{n+1}-\alpha| \cong |x_n-\alpha|^2$

n بزرگ $\quad |x_n-\alpha| \cong 0.1$

$$|x_{n+1}-\alpha| \cong 0.01$$

$$|x_{n+2}-\alpha| \cong (0.01)^2 = 0.0001$$

$$\vdots$$

پس هرچه P بزرگتر باشد، سرعت همگرایی بیشتر است.

قضیه: اگر دنباله $\{x_n\}$ با ضابطه $x_{n+1}=g(x_n)$ به عدد α همگرا باشد و $g(x)$ دارای مشتق دوم پیوسته باشد آنگاه:

α معلوم است:

1) اگر $g'(\alpha)\neq 0$ در این صورت مرتبه همگرائی یک است. $(P=1)$

2) اگر $g'(\alpha)=0$ " " " " حداقل دو است $(P\geq 2)$

3) اگر $g'(\alpha)=0$ و $g''(\alpha)\neq 0$ در این صورت مرتبه همگرائی، خود دو است $(P=2)$

جلسه ششم:

یادآوری: مرتبه همگرایی

ثابت کردیم که در روش نیوتن سریعتر به جواب معادله می‌رسد. از مرتبه همگرائی استفاده می‌کنیم

$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \qquad \lim_{n\to\alpha}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^P}=\lambda \qquad \lambda, P > 0$

P مرتبه همگرائی.

هرچه P بزرگتر باشد، در نیوتن، زودتر به جواب می‌رسد.

$f(x)=0 \longrightarrow x_{n+1}=g(x_n) \qquad n=0,1,2,\dots$

α معلوم

تعداد مسائلی که α معلوم است، مرتبه همگرایی را می خواهند:

الف) $g'(\alpha)\neq 0 \qquad P=1$

ب) $g'(\alpha)=0 \qquad P\geq 2$ حداقل

ج) $g'(\alpha)=0,\ g''(\alpha)\neq 0 \qquad P=2$ دقیقاً

$$g(x_n)=g(\alpha)+(x_n-\alpha)g'(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)^2}{2!}g''(\alpha)+\dots$$

چون این معادله در رابطه $x_n=\alpha$ باید صدق کند $\longleftarrow$ $g(\alpha)=\alpha$

$$x_{n+1}-\alpha=(x_n-\alpha)g'(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)^2}{2!}g''(\alpha)+\dots$$

اگر $g'(\alpha)\neq 0 \longrightarrow \dfrac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=g'(\alpha)+\dfrac{x_n-\alpha}{2!}g''(\alpha)+\dots$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|}=|g'(\alpha)|\neq 0$$

اثبات قسمت الف

بقیه را هم می توانید اثبات کنید...

مثال 1: فرض کنید دنباله $x_{n+1}=\frac{1}{5}\left(4x_n+\frac{3}{x_n^4}\right)\overset{\text{پس}}{=}g(x_n)$ *

از روش نقطه ثابت به α همگرا باشد.

الف) مطلوبست حد دنباله $\{x_n\}$

ب) مرتبه همگرایی مثال فوق

نکته: اثبات کنید

الف) $\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ یا $\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\alpha$

* پس از دو طرف معادله حد می گیریم $\longrightarrow \alpha=\frac{1}{5}\left(4\alpha+\frac{3}{\alpha^4}\right)\longrightarrow 5\alpha^5=4\alpha^5+3$

$\longrightarrow \alpha^5=3$ یا $\alpha=\sqrt[5]{3}$

$$g(x)=\frac{1}{5}\left(4x+\frac{3}{x^4}\right)=\frac{1}{5}(4x+3x^{-4})$$

$$g'(x)=\frac{1}{5}(4-12x^{-5}) \longrightarrow g'(\alpha)=0 \longrightarrow p\geq 2$$

$$g''(x)=12x^{-6} \longrightarrow g''(\alpha)\neq 0 \longrightarrow P=2$$

یعنی اگر $(x_n-\alpha)$ را به توان 2 برسانیم و n را به ∞ میل بدهیم، حتماً به صفر میل می‌کند.

(اگر گفتند [illegible] $=3$ چون α را دقیق نمی‌توانیم تعیین کنیم و فقط می‌دانیم $1<\alpha<2$ است

بنابراین نمی‌توانیم برای این رابطه، مرتبهٔ همگرایی تعیین کنیم.)

مثال 2: کدام یک از دو تابع $g_1(x)=\frac{x+2}{x+1}$ و $g_2(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$ برای تقریب ریشه $x^2-2=0$ از روش نقطه ثابت بهتر است؟

$$x^2-2=0 \to \alpha=\sqrt{2}$$

$$g_1'(x)=\frac{(x+1)-(x+2)}{(x+1)^2}=\frac{-1}{(x+1)^2} \longrightarrow g'(\sqrt{2})=g'(x)\neq 0 \longrightarrow p=1$$

یعنی سرعت همگرایش خیلی کند است.

پس از این استفاده نمی‌کنیم چون مناسب نیست.

$$g_2(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right) \longrightarrow g_2'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{x^2}\right) \longrightarrow g'(\sqrt{2})=0 \longrightarrow P\geq 2$$

تا همین جا معلوم است که $g_2(x)$ تقریب بهتری به دست می‌دهد با سرعت بیشتری

اما اگر مرتبه همگرایی را بخواهیم به دست بیاوریم

$$g_2''(x)=2x^{-3}=\frac{2}{x^3} \longrightarrow g''(\sqrt{2})\neq 0 \longrightarrow P=2$$

اگر در امتحان چیزی دادند که فقط برای α می‌شد بازه انتخاب کرد و گفتند مرتبهٔ همگرایش چند است، باید بگویید نمی‌توان مرتبهٔ همگرایی را به دست آورد.

در حالت کلی اگر $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \cdots = g^{(k-1)}(\alpha) = 0$

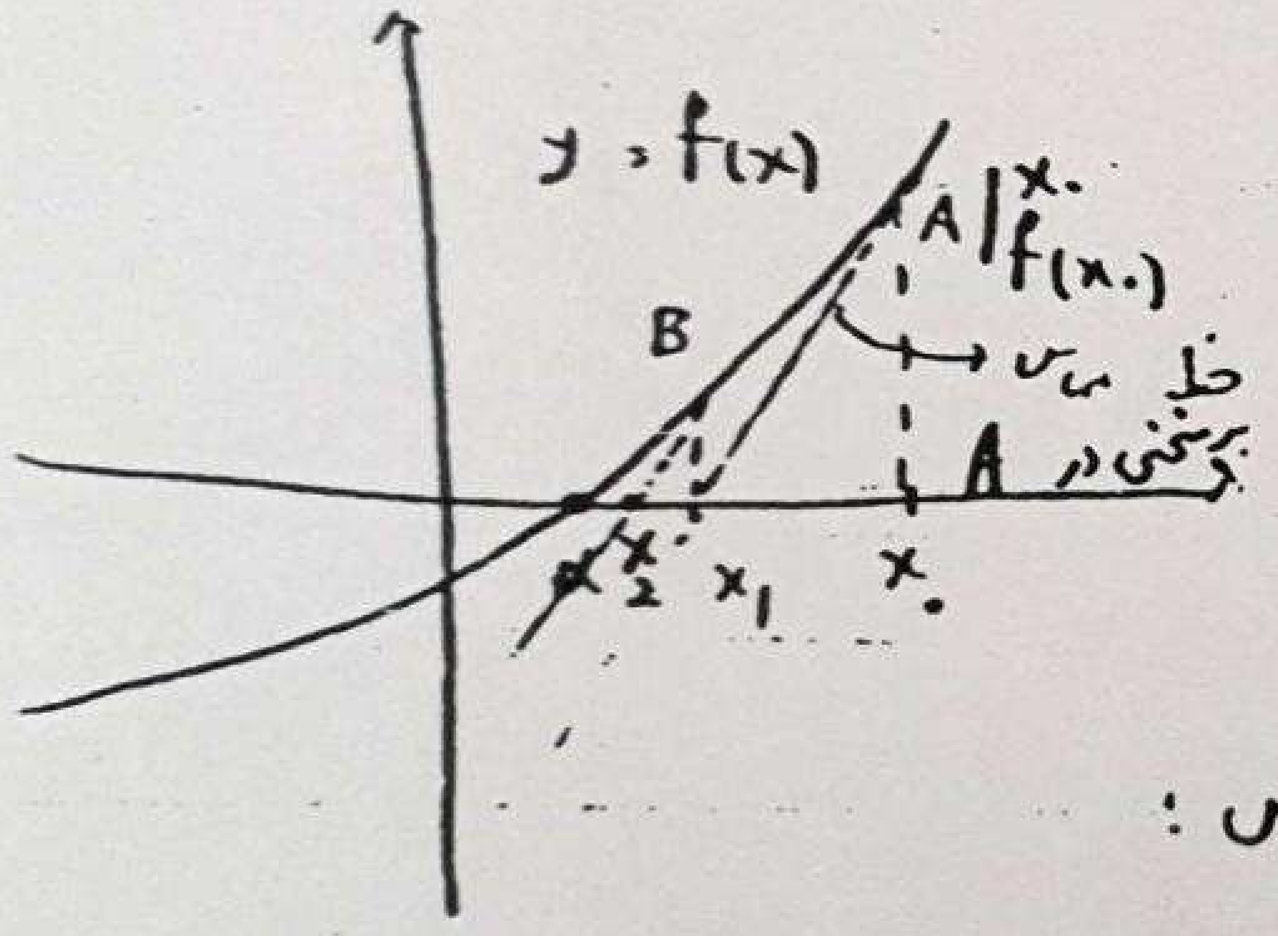
مرتبه همگرایی دنباله $\{x_n\}$ با ضابطه $x_{n+1} = g(x_n)$ حداقل k است.

و اگر $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \cdots = g^{(k-1)}(\alpha) = 0$, $g^{(k)}(\alpha) \neq 0$

آنگاه، مرتبه همگرایی، دقیقاً k است.

در امتحان حتماً یا از روش نقطه ثابت و یا از روش نیوتن سوال میاد.

$\boxed{\,}$ روش نیوتن یا نیوتن - رافسون برای تقریب ریشه معادله $f(x)=0$ (حالت خاص روش نقطه ثابت)



x_0 یا از رسم شکل / یا از میانیابی بدست می‌آید، $x_0 \cong \alpha$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

چون محل تلاقی خط مماس با محور x ها، $\left|\begin{matrix} x_1 \\ 0 \end{matrix}\right.$ است پس:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

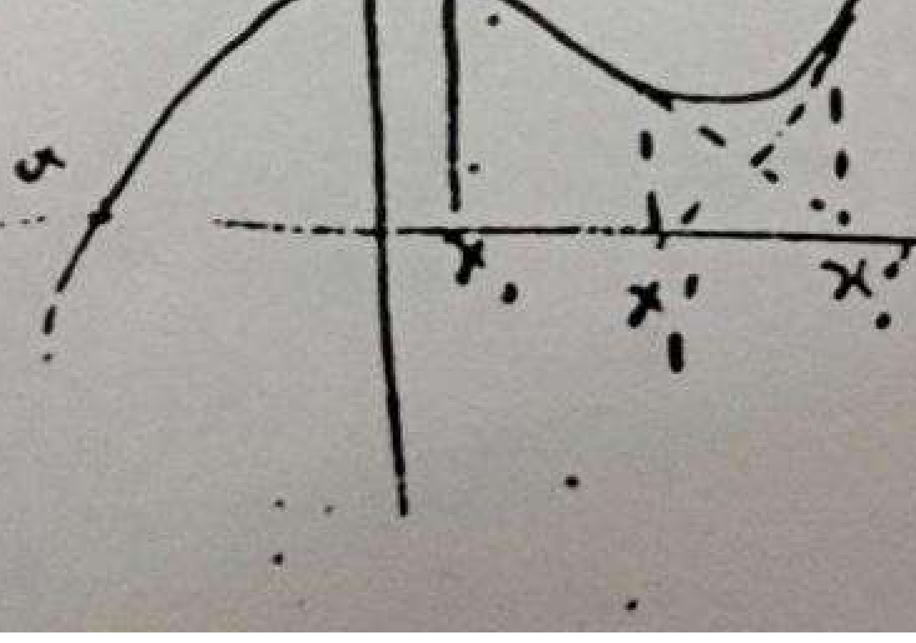
از اینجا می‌توانم x_1 را بدست بیاورم. همین جوری برو تا هر جا که می‌خوای.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

فقط باید $f'(x_n)$ صفر نشه. اگر صفر شه، ممکن است جواب مسئله هیچ وقت درست نیاد. مثل شکل رو به رو

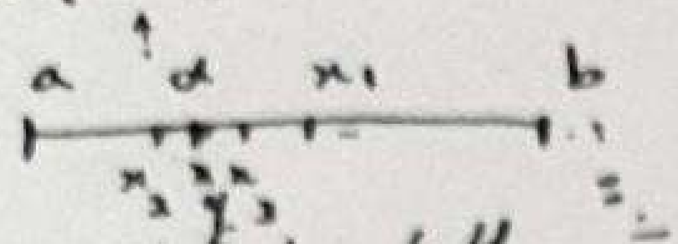


بنابراین x_0 را باید در جای مناسبی انتخاب کنم.

x_0' هم جای خوبی نیست. می‌افتد توی دور

بنابراین انتخاب x_0 مهم است.

اینا رو به روش نیوتن می‌گذاریم.



گفتیم برای اینکه α را درست انتخاب کنیم، اول با روش دو بخشی یا ۲ تا ۳ بار جلو برویم. بعد یک حدس خوب پیدا کنیم. بعد بیایم توی روش نیوتن.

یادتون باشه حفظ کردن فرمول نیوتن مهم نیست. معادله خط مماس را می‌نویسیم.

مثال: مطلوبست تقریبی از ریشه $x=e^{-x^2}$ به کمک روش نیوتن تا ۲ تکرار.

$$x-e^{-x^2}=0 \longrightarrow \begin{cases} f(x)=x-e^{-x^2} \\ f'(x)=1+2xe^{-x^2} \end{cases}$$

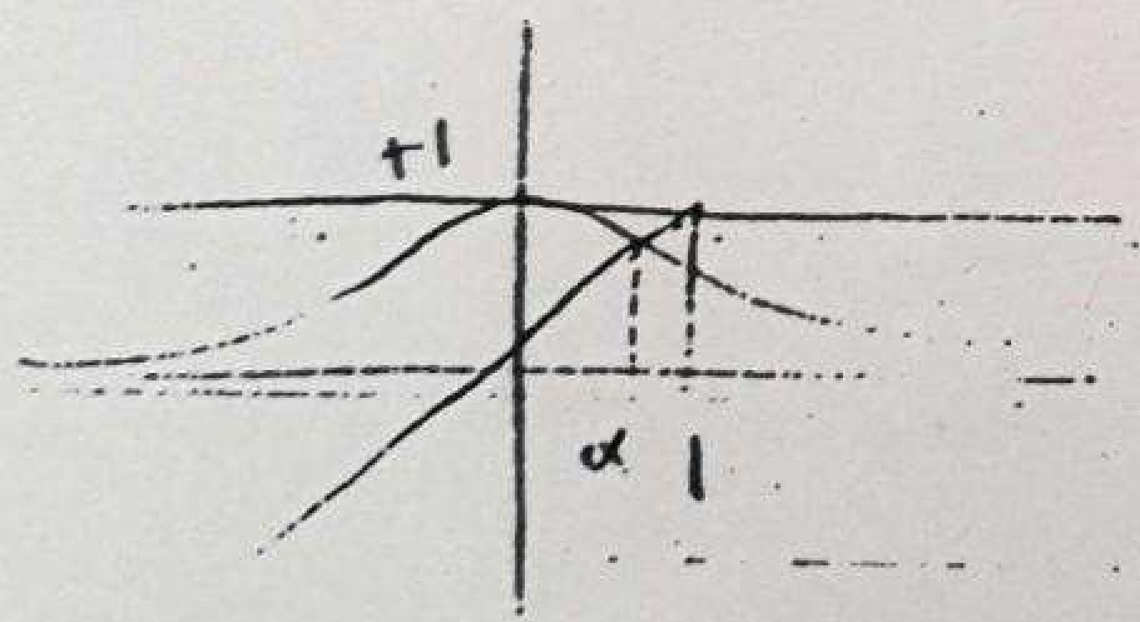
$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-e^{-x_n^2}}{1+2x_ne^{-x_n^2}}$$

$$x_0=0.5$$

$$n=0:\quad x_1=x_0-\frac{x_0-e^{-x_0^2}}{1+2x_0e^{-x_0^2}}$$

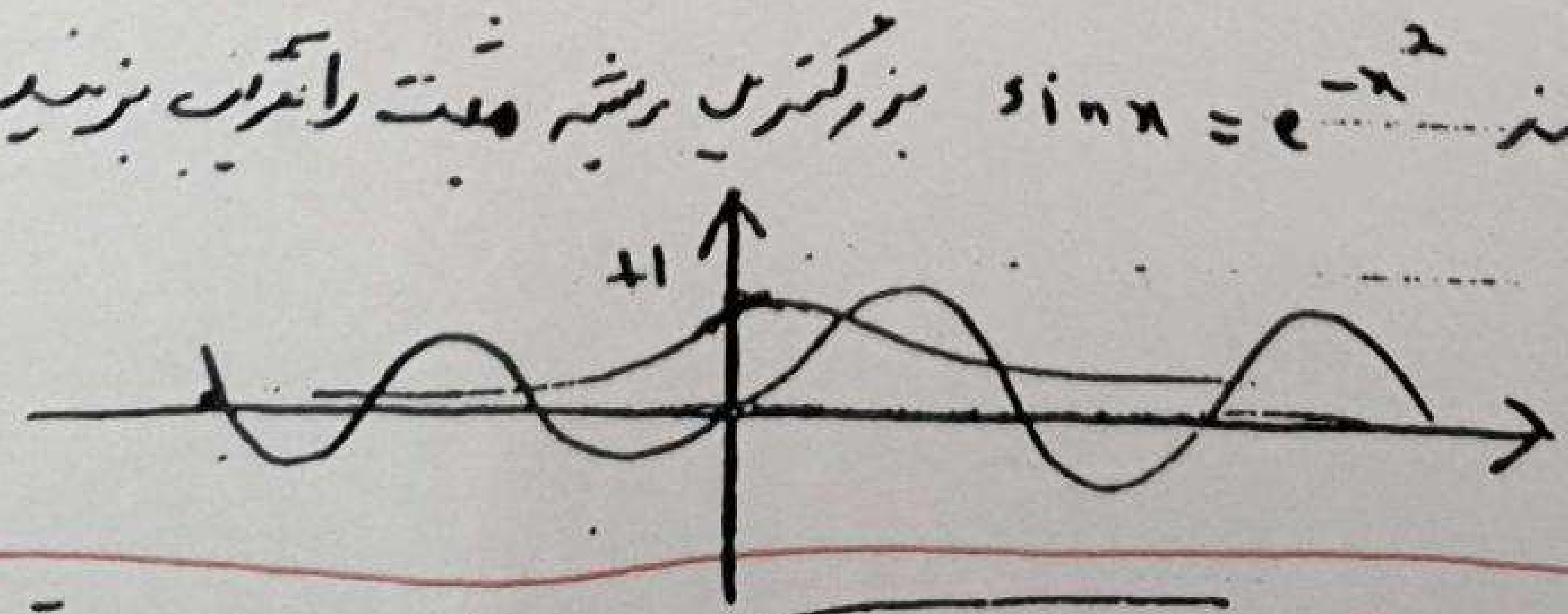
$$x_2= \;\vdots$$

α را با رسم منحنی $x-e^{-x^2}=0$ می‌توان بدست آورد.



از رسم شکل نتیجه می‌شود که $1>\alpha>0$:

(اشکال است سوال بدهند $\sin x=e^{-x^2}$ بزرگترین ریشه مثبت را تقریب بزنید.)



مثال ۲: فرمولی برای تقریب عدد $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}$ به کمک روش نیوتن بیابید.

$$x=\sqrt{2+x} \longrightarrow x^2-x-2=0 \longrightarrow \begin{cases} f(x)=x^2-x-2 \\ f'(x)=2x-1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha_1=2 & \text{ق ق} \\ \alpha_2=-1 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

چون در $x=\sqrt{2+x}$ صدق نمی‌کند.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-x_n-2}{2x_n-1} \longrightarrow x_{n+1}=\frac{x_n^2+2}{2x_n-1}=g(x_n)$$

مثال 3 ـ فرمولی برای ریشه K ام عدد a با میانگین تقریبی از $\sqrt[3]{5}$ به کمک روش نیوتن با 3 تکرار

مثال 4 ـ فرمولی برای معکوس عدد a به کمک روش نیوتن بیابید.

$$x = \sqrt[K]{a} \longrightarrow \begin{cases} f(x) = x^K - a = 0 \\ f'(x) = Kx^{K-1} \end{cases}$$

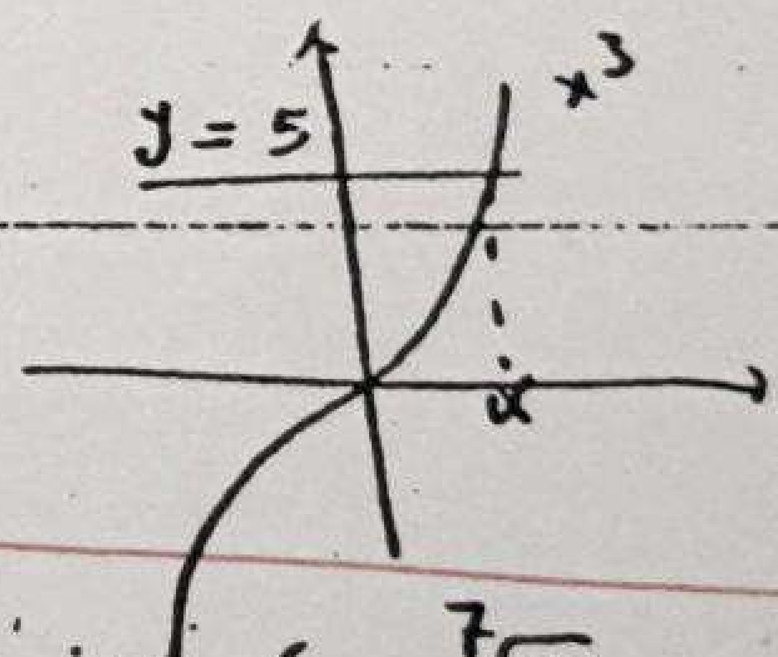
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^K - a}{Kx_n^{K-1}} = \frac{(K-1)x_n^K + a}{Kx_n^{K-1}} = \frac{1}{K}\left[(K-1)x_n + \frac{a}{x_n^{K-1}}\right]$$

(ماشین حساب هم برای حساب $\sqrt[3]{5}$ دقیقاً از همین روش استفاده می کند.)

اگر $K = 2, a = 2 \longrightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

مثل همون مثال که گفتیم ریشه $x^2 - 2 = 0$ را بدست بیاورید.

$x = \sqrt[3]{5} \rightarrow K = 3, a = 5 \longrightarrow f(x) = x^3 - 5$



جانا اگر مسئله بده $x = \sqrt[7]{46}$ که نتوان x را به راحتی حساب کرد یا x را به شانسی (حدس) بزنید یا اینکه با ماشین حساب می زنید. یک x کنار جواب پیدا کنید.

مثال: شرط همگرایی روش نیوتن و مرتبه همگرایی آن را برای ریشه ساده α بیابید.

α ریشه ساده است $\longrightarrow f(\alpha) = 0 \;,\; f'(\alpha) \neq 0$ (برای اینکه ریشه مضاعف نشه)

یا $f(x) = (x - \alpha)\, q(x) \;,\; q(\alpha) \neq 0$

این تعریف ریشه ساده است.

نیوتن حالت خاص نقطه ثابت با $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$g(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$$

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} \longrightarrow g'(\alpha) = 0 \longrightarrow p \geq 2$$

مرتبه همگرائی حداقل ۲

پس ریشه ساده ، مرتبه همگرائی اش حداقل ۲ است.

$$g''(x) = \frac{(f'f'' + f f^{(3)})(f')^2 - 2 f' f'' f f''}{(f')^4} \xrightarrow[f'(\alpha) \neq 0]{f(\alpha) = 0} g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

اگر $f''(\alpha) \neq 0$ در این مورد $g''(\alpha) \neq 0$ و مرتبه همگرائی دقیقاً 2 است.

شرط همگرائی $\max\limits_{a \leq x \leq b} |g'(x)| < 1 \longrightarrow |g'(x)| \leq \max |g'(x)| < 1$

$$\longrightarrow \left| \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1 \quad \text{یا} \quad |f(x) f''(x)| < (f'(x))^2$$

این یعنی شرط همگرائی روش نیوتن برای ریشه ساده.

این سوال ترم پیش بوده که گفتند شرط همگرایی در روش نیوتن برای ریشه ساده چیست.

جوابش
$(P=1)$

مثال: شرط همگرائی روش نیوتن و مرتبه همگرایی آن را برای ریشه مکرر مرتبه K بیابید

α ریشه تکراری K

$$a \leq \alpha \leq b \quad \text{یا} \quad f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(K-1)}(\alpha) = 0 \ , \ f^{(K)}(\alpha) \neq 0$$

اما شما چیزی که در مسئله حل گفتم ، تا اینجا حل نیست ، باید با استفاده از تعریف ثابت کنید که P=1 است.

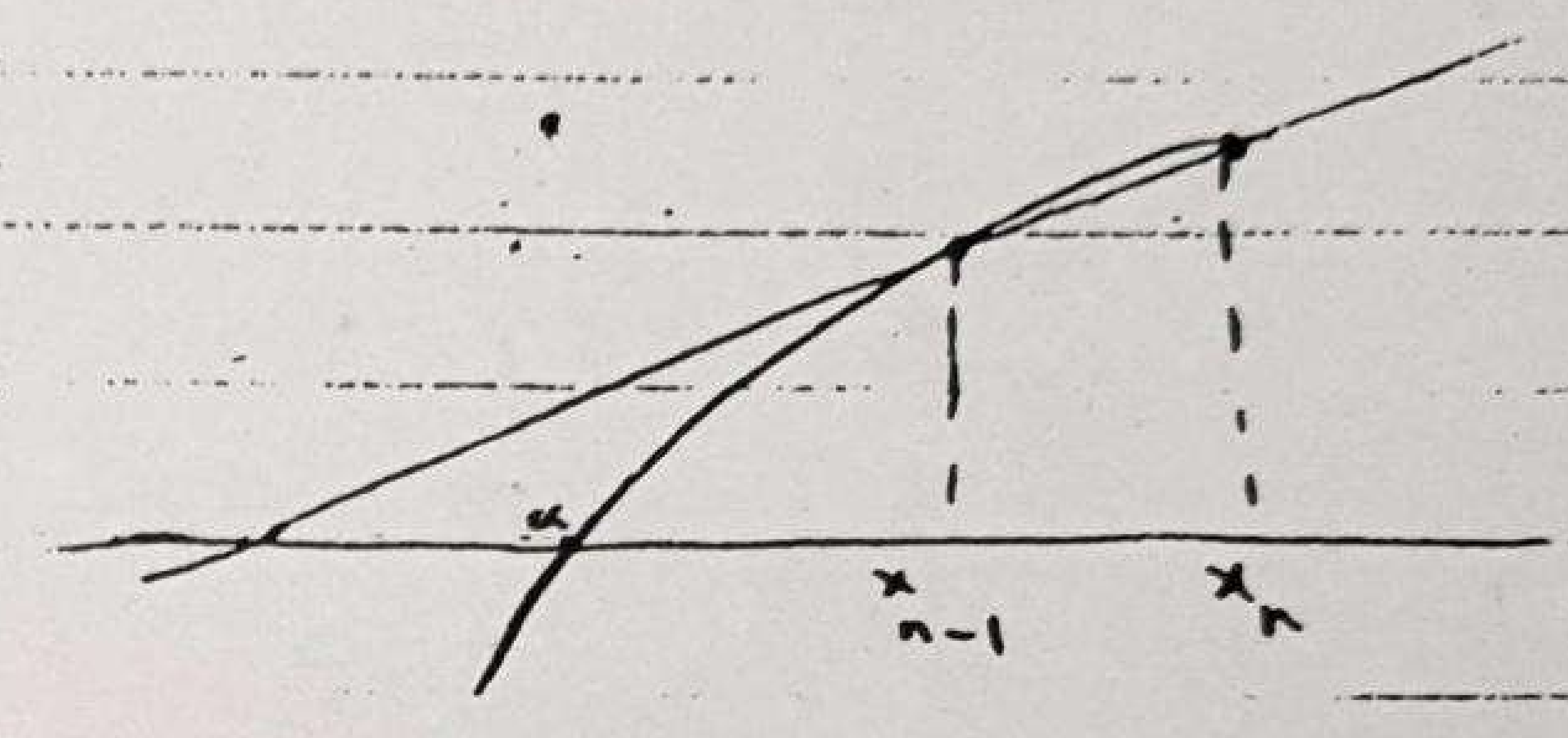
اسم روش رو می‌گم شاید مسئله حل نکنم ، واسه‌تا تا در امتحان بیاد. خودتون مسئله حل کنید.

روش وتری - اگر در فرمول نیوتن قرار دهیم $f'(x_n)=\lim_{x\to x_n}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}$

و x مقداری نزدیک به x_n باشد x_{n-1} داشته باشیم $f'(x_n)\simeq\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$

در نیوتن داشتیم $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\longrightarrow$ $\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}f(x_n)}$ فرمول روش وتری

در نقطه شروع دارد $\begin{cases}x_0\\x_1\end{cases}$



مثلا در $3x^2=1$ می‌دانیم $\alpha>0$ ← مثلا $\begin{cases}x_0=0.5\\x_1=0.6\end{cases}$

روش نقطه ثابت $\Longleftarrow$ روش نیوتن $\Longleftarrow$ روش وتری

این دو تا مهم است. حتماً سوال میاد.

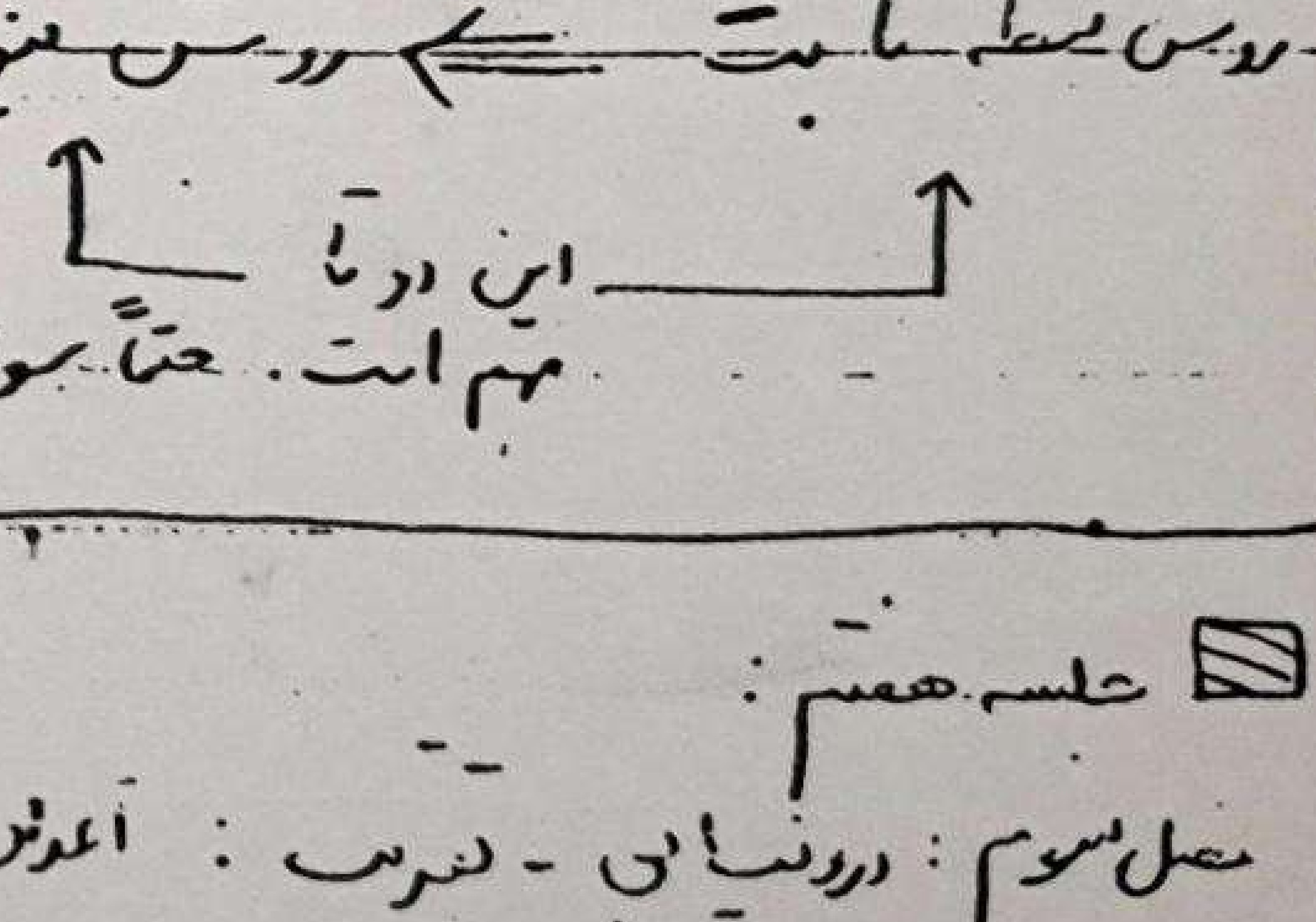
جلسه هشتم:

فصل سوم: درونیابی - تعریف: الگو را با ماشین حساب درست درست بیاورید.

مقدار یک تابع را در نقاط گسسته بدست آورده ایم. ولی خود تابع را نداریم. یعنی ضابطه x رو نداریم.

x_i	x_0	...	x_1	...	x_n
f_i	f_0	...	f_1	...	f_n

$f(x)=?$



تابع را با درونیابی بدست می‌آوریم.

مثلاً $f(-\frac{3}{2})$ را می‌خواهیم با درونیابی به دست بیاوریم:

-2	-1	0
3	1	1