روش وتری — اگر در فرمول نیوتن قرار دهیم

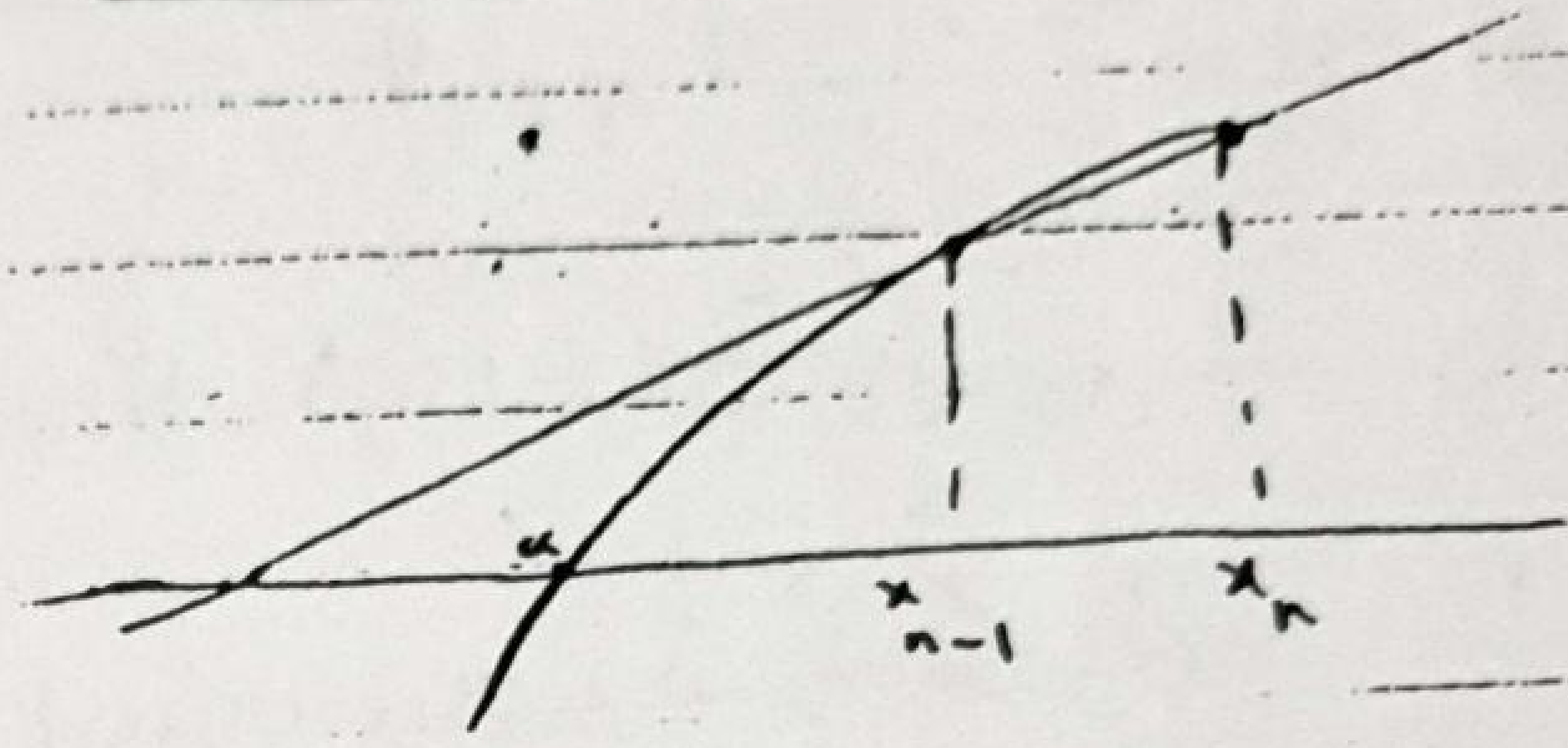
$$f'(x_n) = \lim_{x\to x_n} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x}$$

و x مقداری نزدیک به x_n مانند x_{n-1} داشته باشد

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$$

در نیوتن داشتیم $x_{n+1}=x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\longrightarrow$ $\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})} f(x_n)}$ فرمول روش وتری

در نقطه شروع دارد $\begin{cases} x_0 \\ x_1\end{cases}$



مثلا در $3xe^x = 1$ می‌دانیم $0<\alpha<1$ ← مثلا $\begin{cases} x_0=0.5 \\ x_1=0.6\end{cases}$

روش نقطه ثابت ⇐ روش نیوتن ⇐ روش وتری

این دو تا مهم است. حتما سوال میاد

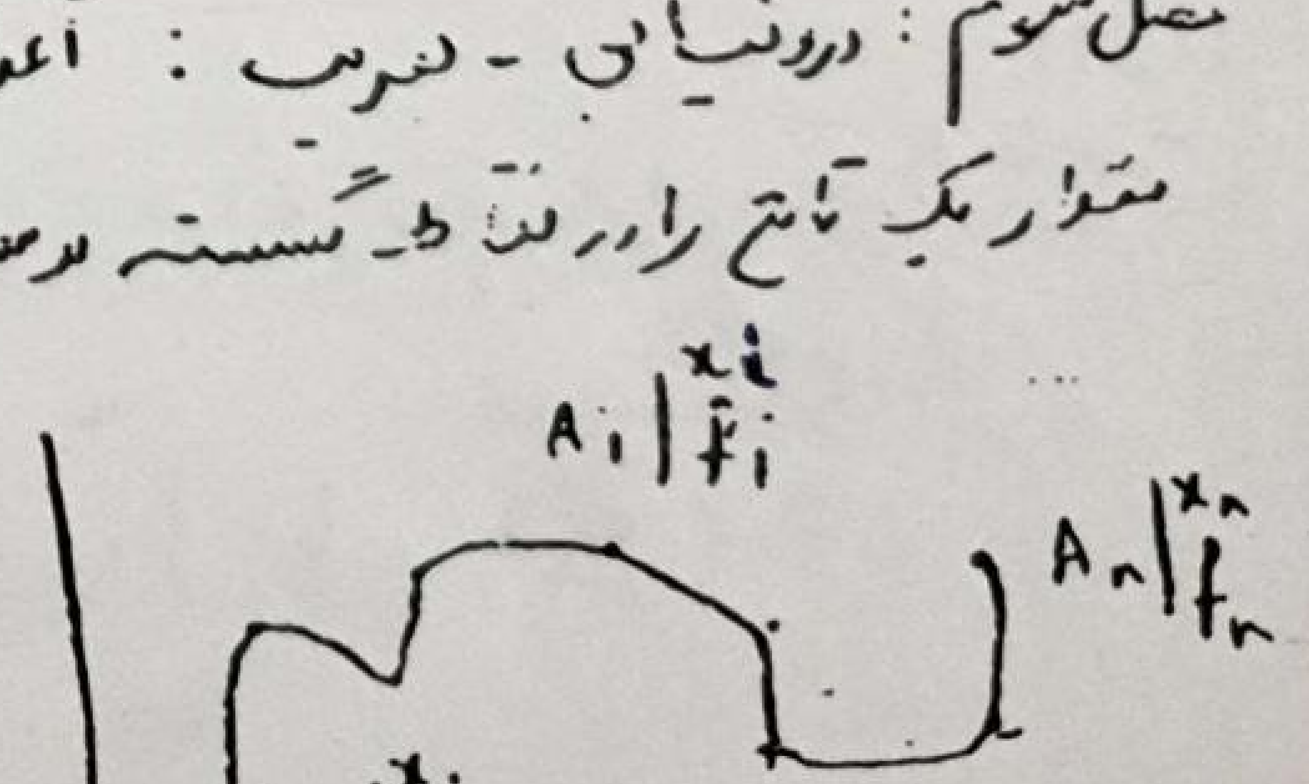
جلسه هفتم:

فصل سوم: درونیابی - تعریف: الگوها را با ماشین حساب درست درست بیارید.

مقدار یک تابع را در نقاط گسسته بدست آورده ایم. ولی خود تابع را نداریم. یعنی رابطه x رو نداریم.

x_i	x_0	.	.	x_i	. . .	x_n
f_i	f_0	.	.	f_i	. . .	f_n

$y = f(x) = ?$



تابع را با درونیابی بدست می‌آوریم.

مثلا: $f(-\frac{3}{2})$ رو می‌خواهیم با درونیابی بیابید.

x	-2	-1	0
f	3	1	1

درون‌یابی یعنی برآورد (تخمین) مقدار $f(x)$ برای $x_0 < x < x_n$ و $x \neq x_i$

درون‌یابی یعنی برآورد مقادیر $f(x)$ برای $[x_0, x_n] \ni x$ یعنی x بین بازه باشد.
با برون‌یابی کار نمی‌کنیم. برای محاسبات پیشرفته است.

شرط درون‌یابی $f(x_i) = f_i \quad \forall i = 0, 1, 2, \ldots, n$

در درس آمار و احتمال نیز جدول می‌دهند.

سری فوریه $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ (درونیابی مثلثاتی)

برای تقریب زدن $f(x)$ روش‌های مختلفی وجود دارد. $f(x) \cong ?$

ساده‌ترین روش، این است که $f(x)$ را با یک چندجمله‌ای تقریب بزنیم: $f(x) \cong P_n(x)$

(می‌تواند مثلثاتی هم باشد) چندجمله‌ای حداکثر درجه n ام

(یا سری بسل باشد $\sum_{k=1}^{n} c_k J_k(x)$) $f(x) \cong a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

مزیت چندجمله‌ای:

۱- محاسبه چندجمله‌ای به ازای x دلخواه، ساده است.

۲- مشتق و انتگرال چندجمله‌ای به سادگی قابل محاسبه است. البته چون خطا وجود دارد، باید خطا را تعیین کنیم (مثل فصل اول) $|f(x) - P_n(x)|$ که این عبارت در درون‌یابی به سمت صفر برود. $\forall x \in [x_0, x_n], x \neq x_i$

Matlab و Maple نیز با interpolition (درون‌یابی)،
تابع را بدست می‌آورد.

شرط درون‌یابی $f(x_i) = P_n(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, \ldots, n$

(البته در تقریب زدن نرم مثلثاتی، با چندجمله‌ای، کار راحت‌تری هست. $|f(x) - P_n(x)|$ به سمت صفر میل می‌کند.)

روش لاگرانژ

x_i	x_0	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
f_i	f_0	$\cdots$	f_i	$\cdots$	f_n

در این روش برای نقاط جدول، چندجمله‌ای‌های لاگرانژ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \quad \forall i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

چندجمله‌ای درجه n ام

خاصیت این تابع :
$$\begin{cases} L_i(x_i)=1 \\ L_i(x_j)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_0(x_0)=1 \\ L_0(x_j)=0 \quad j\neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1(x_1)=1 \\ L_1(x_j)=0 \quad j\neq 1 \end{cases}$$

مثال چند جمله ای درونیاب $P(x)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x) = f_0 L_0(x) + \dots + f_n L_n(x)$$

همچنین باید در شرط درونیابی صدق کند یعنی :

$$P_n(x_0)=f_0 \underbrace{L_0(x_0)}_{\text{این یکه}} + f_1 \underbrace{L_1(x_0)}_{\text{صفره}} + \dots + f_i \underbrace{L_i(x_0)}_{\text{صفره}} + \dots + f_n \underbrace{L_n(x_0)}_{\text{صفره}} = f_0$$

$$P_n(x_1) = f_0 \underbrace{L_0(x_1)}_{\text{صفره}} + f_1 \underbrace{L_1(x_1)}_{\text{یکه}} + \dots + f_n \underbrace{L_n(x_1)}_{\text{صفره}} = f_1$$

$\vdots$

$$P_n(x_i)=f_i \qquad i=0,1,\dots,n$$

اشکال این روش : برای n های بزرگ، محاسبه دستی اش، کند، و تکرار ... حداکثر تا $n=4$ می خواهند. معمولاً از این روش استفاده نمی کنند.

مثال ۱: چند جمله ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را بیابید و حاصل $f(-\frac{1}{2})$ را با سه رقم اعشار کنید؟ ($n=2$ داریم) (n شو رو پایین دارم) از صفر شروع کرده.

x_i	-2	-1	0
f_i	3	1	1

چند جمله ای درجه 2 (یعنی $n=2$)

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(-2-(-1))(-2-0)} = \frac{x^2+x}{2}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+2)(x-0)}{(-1+2)(-1-0)} = \frac{x^2+2x}{-1}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+2)(x+1)}{(0+2)(0+1)} = \frac{x^2+3x+2}{2}$$

Scanned by TapScanner

چون ضرایب f ها توری طوری باشه که x^2 ها برن
حداکثر درجه 2 است.

$$P_n(x) = P_2(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)$$
$$= 3L_0(x) + L_1(x) + L_2(x)$$

باید تمام مراحل قبلی را دقیقا تمام و اجرا کنید $\longrightarrow P_2(x) = x^2 + x + 1$

برای چک کردن سه نقاط جدول باید ارزش صدق کند $P_2(-2)=3,\ P_2(-1)=1,\ P_2(0)=1$

پس P_2 حتماً چند جمله ای درونیاب است.

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) \simeq P_2(-1/2) = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + (-1/2) + 1 =$$

حال آیا این علامت تقریب درست هست؟ باید $|f(x) - P_2(x)|$ را بررسی کنیم.

ادامه مثال: با اضافه کردن نقاط (1,3) و (2,7) به جدول، مجدداً چند جمله ای درونیاب را بیابید

	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	1	2
f_i	3	1	1	3	7

$n=4$

حداکثر چند جمله ای درجه 4

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} \\ L_1(x) = \dots \\ L_2(x) = \dots \\ L_3(x) = \dots \\ L_4(x) = \dots \end{cases}$$

$$P_n(x) = P_4(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x) + f_4 L_4(x)$$
$$= 3L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) + 3L_3 + 7L_4(x)$$

حداکثر درجه 4 $P_4(x) = \dots$

نتیجه: تنها یک چند جمله ای وجود دارد که $P_n(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$

(بدون اثبات می پذیریم) (سر کلاس اثباتش رو نوشت ولی ننوشتم.) ← Are baw, khub kari karD :P

دقت کنید اگر سراغ اثبات نرید، تکراری سر برید! به سر برید. چون مثلاً اثبات رو 4D می شه. ضرب که می کنید؛ به روحاش رو تمام کنید رو کلی رنگ و رنگ داره! (امیدوارم گفتم.)

با تشکر از شما

روش نیوتن: در این روش، چند جمله‌ای‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

a_0 $\quad 1$ $\quad$ درجه صفر

a_1 $\quad (x-x_0)$ $\quad$ درجه یک

a_2 $\quad (x-x_0)(x-x_1)$ $\quad$ درجه دو

$\vdots$

a_n $\quad (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$ $\quad$ درجه n

حال $P_n(x)$ را ترکیب می‌کنیم:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

ضرایب a_0، a_1، ...، a_n را طوری می‌یابیم که شرط درونیابی درست باشد:

$$P_n(x_i) = f_i \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

اگر جاگذاری کنیم: a_0 باید f_0 باشد

$$i=0 \longrightarrow P_n(x_0) = f_0 \longrightarrow \boxed{a_0 = f_0}$$

$$i=1 \longrightarrow P_n(x_1) = f_1 \longrightarrow a_0 + a_1(x_1-x_0) = f_1 \longrightarrow \boxed{a_1 = \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}}$$

$$i=2 \longrightarrow P_n(x_2) = f_2 \longrightarrow a_0 + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = f_2$$

$$\longrightarrow \boxed{a_2 = \frac{\dfrac{f_2-f_1}{x_2-x_1} - \dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}}$$

$\vdots$

به طور مشابه: محاسبه می‌کنیم.

(این a ها در یک جدول به نام جدول تفاضلات (آماره) نوشته شده است.)

تفاضلات تقسیم شده نیوتن و جدول تفاضلات تقسیم شده:

الف) تفاضلات تقسیم شده مرتبه اول برای دو نقطه در جدول:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} \quad \ldots$$

این جدول رو با ماشین حساب اگر حل کنیم، اشتباهات محاسباتیمان کم می‌شود. (چون از روی قبلی حساب می‌کنیم)

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$ مرتبه اول برای دو نقطه	مرتبه دوم برای سه نقطه	مرتبه سوم برای چهار نقطه
x_0	$a_0 = f_0$			
x_1	f_1	$a_1 = f_{01} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = A$	$a_2 = \frac{B - A}{x_2 - x_0} = A' = f_{012}$	$a_3 = \frac{B' - A'}{x_3 - x_0}$
x_2	f_2	$f_{12} = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = B$	$\frac{C - B}{x_3 - x_1} = B' = f_{123}$	$\frac{C' - B'}{x_4 - x_1}$
x_3	f_3	$= C$	$= C'$	a_4
x_i	f_i	$f_{i,i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$	$\vdots$	
x_{i+1}	f_{i+1}			
x_{i+2}	f_{i+2}	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
x_{n-1}	f_{n-1}			
x_n	f_n	$f_{n-1,n} = \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$		
$n+1$ عنصر	$n+1$ عنصر	n عنصر	$n-1$ عنصر	

ب) تفاضلات تقسیم شده مرتبه دوم و برای سه نقطه مجاور

(خوبی این روش اینست که اگر درجه جدید جمله ای را اضافه یا کم کنند، محاسبات قبلی بهم نمی‌ریزه
از پایین جدول اضافه می‌کنیم.)

نکته: روش نیوتن برای نقاط هم متساوی الفاصله و غیر متساوی الفاصله بکار می‌رود.

تمرین:

x_i	f_i
1	2
2	7
3	12
4	19