Subject جلسه پانزدهم
Date ۱۳۹۸/۹/۹

فصل ۳: درونیابی و تقریب:

$f(x) = \sin x$

مقدمه: تابع

مفروض است مطلوبست تکمیل جدول زیر:

x_i	۰	۵°	۱۰°	۲۰°	۳۰°
f_i	۰	۰/۰۸۷	۰/۱۷۳۶	۰/۳۴۲۰	$\frac{1}{2}=0/5$

$f(x) = e^{-x^2}$

x_i	۰	۱	۲	۳
g_i	۱			

فرض کنید تابع جدولی به صورت زیر در $(n+1)$ نقطه متمایز مفروض است.

x_i	x_0	x_1	x_2	....	x_i	....	x_n
f_i	f_0	f_1	f_2	....	f_i	....	f_n

تابع نداریم

درونیابی یعنی برآورد مقدار $f(x)$ برای $x_0 \leq x \leq x_n$ و $x \neq x_0, x_1, \dots, x_n$

و مشروط بر که شکر $f(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$

$f(x) =$ تابع واقعی جدول $= ?$

برای یافتن $f(x)$ روشهای زیادی وجود دارد. یکی از روشها

تقریب $f(x)$ با چند جمله ای از درجه حداکثر n ام است.

اگر دو نقطه داشته باشیم خط رسم می کنیم

اگر ۳ نقطه بود تبدیل می شود به سهمی

(دو معادله ۳ مجهول بی نهایت جواب دارد) برای دو نقطه می توان منحنی درجه ۲ رسم کرد چون (دو معادله با ۳ مجهول می شود)

$$f(x) \cong P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

(a_0 و a_1 و .... و a_n اعداد ثابت)

$P_n(x)$ چند جمله ای درونیاب

شرط درونیابی:

$P_n(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, \dots, n$

روشهای یافتن $P_n(x)$:

۱- روش لاگرانژ: در این روش برای تابع جدولی با $(n+1)$ نقطه متمایز

x_0 و x_1 و .... و x_n چند جمله ای های لاگرانژ از درجه دقیقاً n ام را به صورت زیر تعریف می کنیم.

چند جمله ای از درجه دقیقاً n ام

$L_0(x)$ و $L_1(x)$ و .... و $L_n(x)$

PAPCO

Subject
Date

چون i ما است فقط اندیس i در صورت نوشته نمی شود
در کسر $x^n + \cdots$

حال به ازای $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ تعریف می کنیم:

$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots\underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{\text{عدد}}(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

بدیهی است که:

$$L_i(x)=0 \Longrightarrow x=x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$$

$$L_i(x)=1 \longrightarrow x=x_i$$

$$* \; L_i(x_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases} \qquad L_0(x_j)=\begin{cases}0 & j\neq 0\\ 1 & j=0\end{cases}$$

حال قرار می دهیم

$$P_n(x)=f_0L_0(x)+f_1L_1(x)+\cdots+f_nL_n(x)$$

$$P_n(x_0)=f_0\underbrace{L_0(x_0)}_{1}+f_1\cancel{L_1(x_0)}+\cdots+f_n\cancel{L_n(x_0)}=f_0$$

طبق * ثابت می کنیم

و به همین ترتیب

$$P_n(x_1)=f_1$$
$$\vdots$$
$$P_n(x_n)=f_n$$

مثال: مطلوبست تابع درونیاب جدول زیر و مقدار $f(-0.9)$ با روش لاگرانژ.

x_i	x_0: -1	x_1: 0	x_2: 1
f_i	1	1	3

قبل از حل می گوییم که $n=2$ ← $P_2(x)$ حداکثر درجه ۲

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}=\frac{x^2-x}{2}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}=\frac{x^2-1}{-1}=-x^2+1$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}=\frac{x^2+x}{2}=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$$

از جدول

$$P_2(x)=f_0L_0(x)+f_1L_1(x)+f_2L_2(x)=1\times\left(\frac{x^2-x}{2}\right)+1\left(\frac{x^2-1}{-1}\right)+3\times\left(\frac{x^2+x}{2}\right)$$

بعد از انجام کل محاسبات $P_2(x)$ دقیقاً درجه ۲

$$P_2(x)=x^2+x+1$$

$$f(x)\cong P_2(x)=x^2+x+1 \Longrightarrow f(-0.9)\cong P_2(-0.9)=(-0.9)^2-0.9+1=0.91$$

$$f(-2)\cong P_2(-2)=$$

از این روش فقط برای n های ۲ و ۳ قابل حل است.

مثال ۲) با اضافه کردن نقاط (۲و۷) و (۳و۱۳) به جدول مثال قبل درجه تابع درونیاب دقیقاً چقدر است؟

x_i	-1 (x_0)	0 (x_1)	1 (x_2)	2 (x_3)	3 (x_4)
f_i	1	1	3	7	13

قبل از حل

$$n=4 \Longrightarrow P_4(x)$$

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots}$$

و نقاط داده شده دقیقاً در تابعی که بدست آوردیم صدق می‌کند یعنی تابعی با درجه جدید نداریم

راه دوم: از مثال قبل می‌دانیم $P_2(x)=x^2+x+1$

$$\begin{cases} P_2(x_3)=P_2(2)=7 \\ P_2(x_4)=P_2(3)=3^2+3+1=13 \end{cases}$$

حداکثر درجه ۴ می‌تواند باشد و با توجه به حل قبل درجه ۲ داریم

معایب روش لاگرانژ:

۱- محاسبات روش برای nهای بزرگ پیچیده است.

۲- درجه تابع درونیاب $P_n(x)$ بعد از انجام کل محاسبات یافته می‌شود.

۳- با اضافه کردن نقطه یا نقاط به جدول مجدداً باید مسئله را با جزئیات کامل حل کرد.

۲- روش نیوتن:

در این روش برای $(n+1)$ نقطه متمایز $x_0, x_1, \ldots, x_n$ چندجمله‌ای‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

چندجمله‌ای درجه صفر: 1 — ضریب چندجمله‌ای درجه صفر: a_0

درجه یک: $x-x_0$ — ضریب چندجمله‌ای درجه یکم: a_1

درجه ۲: $(x-x_0)(x-x_1)$ — ضریب چندجمله‌ای درجه دوم: a_2

درجه ۳: $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$\vdots$

درجه n: $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$

قرار می‌دهیم

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

ضرایب مجهول $a_0, a_1, \ldots, a_n$ را طوری می‌یابیم که

$P_n(x_i)=f_i \qquad i=0,1,2,\ldots,n$

$P_n(x_0)=f_0 \Rightarrow a_0=f_0$

$P_n(x_1)=f_1 \Rightarrow a_0+a_1(x_1-x_0)=f_1$

$$a_1=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=f[x_0,x_1]$$

تفاضلات تقسیم شده نیوتن

x_0 را در $P_n(x)$ بگذاریم کل جمله‌ها به جز a_0 صفر می‌شوند.

x_1 ، ، ، غیر از جملات با ضریب a_0 و a_1 بقیه صفر می‌شوند.

Subject جلسه شانزدهم

Date ۹۸/۹/۱۰

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

اگر جدول از پایین اضافه شود تغییر نمی‌کند در وسط اضافه شود تمام جدول تغییر می‌کند.

محاسبه ضرایب a_0 و a_1 و ... و a_n به کمک جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن:

x_i	f_i	تفاضلات تقسیم شده نیوتن مرتبه اول برای دو نقطه مجاور	تفاضلات مرتبه دوم برای ۳ نقطه مجاور	مرتبه سوم برای ۴ نقطه مجاور
x_0	$a_0 = f_0$	$a_1 = f_{01} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = A_0$	$a_2 = f_{012} = \frac{A_1 - A_0}{x_2 - x_0} = B_0$	$a_3 = f_{0123} = \frac{B_1 - B_0}{x_3 - x_0}$
x_1	$a_1 = f_1$	$f_{12} = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = A_1$	$f_{123} = \frac{A_2 - A_1}{x_3 - x_1} = B_1$	$f_{1234} = \frac{B_2 - B_1}{x_4 - x_1} = C$
x_2	$a_2 = f_2$			
x_i	$a_i = f_i$	$f_{i(i+1)} = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = A_i$		
x_{i+1}	$a_{i+1} = f_{i+1}$			
x_{n-1}	$a_{n-1} = f_{n-1}$	$f_{(n-1)n} = \frac{f_n - f_{(n-1)}}{x_n - x_{n-1}} = A_{n-1}$	$f_{(n-2)(n-1)n} = B_{n-2}$	
x_n	$a_n = f_n$			
$n+1$ عنصر	$n+1$ عنصر	n عنصر	$(n-1)$ عنصر	

الی آخر، به ستون آخر تفاضلات تقسیم شده نیوتن می‌رسیم (n) ام برای $(n+1)$ نقطه مجاور.

نکته:

a_0 عنصر اول ستون f — a_1 عنصر اول ستون سوم — a_2 عنصر اول ستون چهارم ...

مثال: در مورد جدول زیر مطلوب است تکمیل جدول تفاضلات و مقدار تقریبی $f(1/1)$

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

x_i	f_i	مرتبه اول برای ۲ نقطه مجاور	مرتبه ۲ برای ۳ نقطه مجاور	مرتبه ۳ برای ۴ نقطه مجاور	۴ برای ۵ نقطه
x_0 ۱	$a_0 = ۳$	$a_1 = f_{01} = \frac{۷-۳}{۲-۱} = ۴$	$a_2 = f_{012} = \frac{۷-۴}{۳-۱} = \frac{۳}{۲}$	$a_3 = f_{0123} = \frac{1-\frac{۳}{۲}}{۴-۱} = \frac{1}{۶}$	$a_4 = f_{01234} = \frac{-\frac{1}{۲}-(\frac{1}{۶})}{۵-۱}$
x_1 ۲	۷	$f_{12} = \frac{۱۴-۷}{۳-۲} = ۷$	$f_{123} = \frac{۹-۷}{۴-۲} = ۱$	$a_4 = f_{1234} = \frac{-\frac{1}{۲}-1}{۵-۲} = \frac{-1}{۲}$	
x_2 ۳	۱۴	$f_{23} = \frac{۲۳-۱۴}{۴-۳} = ۹$	$f_{234} = \frac{۸-۹}{۵-۳} = \frac{-1}{۲}$		
x_3 ۴	۲۳	$f_{34} = \frac{۳۱-۲۳}{۵-۴} = ۸$			
x_4 ۵	۳۱				

و در روش لاگرانژ ضرب نمی شود دیگر (تغییر $L(x)$) ساها را نمی خواهد بنویسیم!

Subject

Date

همه اعلاها باید با سرور هم اعشار نوشته شود

حالا سوال پیش می آید

$a_4 \neq 0$ و a_4 ضریب جمله ای درجه ۴ ... پس $P_4(x)$ دقیقاً درجه ۴ است.

$$P_4(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$f(1.1) \simeq P_4(1.1) = 3 + 4(1.1-1) + \frac{3}{2}(1.1-1)(1.1-2) - \frac{1}{6}(1.1-1)(1.1-2)(1.1-3) + \dots$$

آیا با اضافه کردن (۶ و ۴۱) درجه تابع $P_n(x)$ تغییر می کند؟

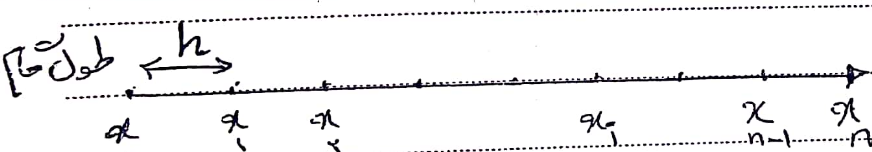
جدول را با عدد ۶ مجدداً حل می کنیم آخرین سطر ستون ها به ترتیب عبارتند از:

۶ ۴۱ ۱۰ ۱ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{15}$

جلسه ۱۷ ۹۸٫۹٫۱۶

جداول متساوی الفاصله و غیر متساوی الفاصله:

روش نیوتن را می توان برای نقاط جدولی متساوی الفاصله یا غیر متساوی الفاصله بکار برد.



$x_1 = x_0 + h$

$x_2 = x_0 + 2h$

⋮

$x_i = x_0 + ih \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n$

حال اگر $x_0 \le x \le x_n$ و

$x = x_0 + sh \qquad 0 \le s \le n$

$x \neq x_0, x_1, \dots, x_n$

فاصله هر نقطه دلخواه x برابر بین نقطه ها است که می خواهیم x بین کدام نقاط قرار دارد.

$x - x_0 = sh$ چندجمله ای درجه یک

$(x-x_0)(x-x_1) = sh(s-1)h = s(s-1)h^2$ درجه ۲

$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = s(s-1)(s-2)h^3$ درجه ۳

⋮

$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) = s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)h^n$ چندجمله ای درجه n

$$Df(x)=f'(x)$$

عملگر D یا مشتق :

$$DDf(x)=Df'(x)\Longrightarrow D^2f(x)=f''(x)$$

$$D^n f(x)=f^{(n)}(x)$$

مشتق مرتبه n ام

جلوی نقاط به مرتبی نقاط $f_0, f_1, \dots, f_i, \dots, f_n$

چون نقاط ما شامل تابع پیوسته نیست عملگر زیر را تعریف می کنیم

عملگر Δ یا پیشرو را به صورت تقریب تعریف می کنیم :

پیشرو مرتبه اول $\Delta f_i = f_{i+1}-f_i$, $\Delta f_0 = f_1 - f_0$

$$\Delta^2 f_i=\Delta(\Delta f_i)=\Delta(f_{i+1}-f_i)=\Delta f_{i+1}-\Delta f_i$$

$$\Delta^2 f_0=\Delta f_1-\Delta f_0,\quad \Delta^2 f_1,\ \dots\ \Delta^2 f_{n-2} \qquad i=0,1,\dots,n-2$$

جدول پیشرو نیوتن : ← فقط برای جداول متساوی الفاصله بکار می رود

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	------ $\Delta^n f_i$
x_0	f_0	$\Delta f_0 = f_1 - f_0 = A_0$	$\Delta^2 f_0 = A_1 - A_0$	
x_1	f_1	$\Delta f_1 = f_2 - f_1 = A_1$	$\Delta^2 f_1 = A_2 - A_1$	$\Delta^n f_0$
x_i	f_i	$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i = A_i$		
x_{i+1}	f_{i+1}			
x_{n-1}	f_{n-1}		$\Delta^2 f_{n-2}$	
x_n	f_n	$\Delta f_{n-1} = A_{n-1}$		

h

می دانیم در روش نیوتن $P_n(x)$ برابر است با :

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots+a_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

و می دانیم

$$a_0=f_0 \qquad a_1(x-x_0)=S\Delta f_0$$

$$a_1=f_{01}=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=\frac{\Delta f_0}{h}$$

$$a_2=f_{012}=\frac{f_{12}-f_{01}}{x_2-x_0}=\frac{\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}-\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}=\frac{\frac{A_1}{h}-\frac{A_0}{h}}{2h}=\frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}$$

یک جدول جدول پیشرو نیوتن
خطای درونیابی

$$q_2(x-x_0)(x-x_1) = \frac{S(S-1)}{2!}\Delta^2 f_0$$

$P_n(x)$ بر حسب عملگر پیشرو برابر است با:

$$P_n(x) = f_0 + S\Delta f_0 + \frac{S(S-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{S(S-1)(S-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots$$

برای x داده شده $x = x_0 + Sh$ در اینصورت $S = \frac{x-x_0}{h}$

نکته:
برای x داده شده نزدیکترین نقطه به x پیش از آن را انتخاب کرده و قرار می‌دهیم $S = \frac{x-x_0}{h}$

مثال: مطلوبست مقدار $f(0.2)$ از جدول زیر:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
$x_0 = 0$	7	$\Delta f_0 = 4$	$\Delta^2 f_0 = 0$	$\Delta^3 f_0 = 0$	
$x_1 = 1$	11	$\Delta f_1 = 4$	$\Delta^2 f_1 = 0$	$\Delta^3 f_1 = 2$	$\Delta^4 f_0 = 2$
2	15	$\Delta f_2 = 4$	$\Delta^2 f_2 = 2$		
3	19	$\Delta f_3 = 6$			
$x_4 = 4$	25				

مراحل تفاضل با Δf_0 شروع می‌شوند
کردن تفاضلات نامیده می‌شود.
تفاضل ستون سوم $\Delta^2 f$

چون جدول متساوی الفاصله است پس روش پیشرو استفاده می‌شود

حداکثر درجه ۳

$n = 3 \xrightarrow{\text{قبل از حل}} P_3(x)$

حال بعد از تکمیل جدول تابع درونیاب دقیقاً درجه ۱ است چون $\Delta f_0 \neq 0$

$$f(x) \simeq P_1(x) = f_0 + S\Delta f_0 = 7 + 4x$$

برای $x = 0.2$ نزدیکترین نقطه جدول به $x_0 = 0$ است پس

$\boxed{x = x_0 + Sh}$

$h = 1 \Rightarrow x = 0 + S \Rightarrow x = S$, $\boxed{x = 0.2} \Rightarrow \boxed{S = 0.2}$

آیا با اضافه کردن (۴ و ۲۵) به جدول، تابع درونیاب تغییر می‌کند؟ بله

$$P_4(x) = 7 + 4S + \frac{S(S-1)(S-2)(S-3)}{4!} \times 2$$

خطای درونیابی:

اگر $P_n(x)$ چند جمله‌ای درونیاب جدول تابع میدا کنیم

x_i	x_0	x_1	...	x_n
f_i	f_0	f_1		f_n

$\rightarrow n+1$ جمله دلیل

باشد در این صورت اگر $f(x)$ تابع واقعی جدول و مشتق $(n+1)$ ام تابع $f(x)$ موجود باشد
زمانی کاربرد دارد که تابع $f(x)$ را ما بدهد. اگر تابع نداده بود این فرمول کاربرد ندارد

$$f(x)-P_n(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(z)$$

که $x_0 \leq z \leq x_n$ و z مربوط به عدد انتخابی بتره است

$z \neq x_0, x_1, \ldots$ توجه: مثل میانگین در $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ نقطه c بین a, b

در مورد مثال قبل $n=3$, $n+1=4$

$$f(x)-P_3(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}f^{(4)}(z)$$

اگر بخواهیم کمتر را ماکزیمم کنیم صورت باید:

$h(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$ چون چند جمله‌ای درجه ۴ می‌شود زمان ترازوی از مشتق ۳ سقف درکه دیگر به بعد
حاصل عددی که کمتر درنظر گرفت یعنی کل اعداد در فاصله ۰ تا ۳ هستند پس تک تک کمتر از ۳ هستند.

$|x-x_0| \leq 3$

$|x-x_1| \leq 3$ و ... یعنی $h(x) \leq 3\times3\times3\times3=81$

جلسه هجدهم ۱۳۹۸,۹,۱۷

نکته ۱: برای تابع $f(x)$ تا مرتبه $(n+1)$ مشتقات $f(x)$ را محاسبه کرده و کران بالای مشتق $(n+1)$ ام را می‌یابیم:

$f(x)$ $f'(x)$ ... $f^{(n+1)}(x)$

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_n}|f^{(n+1)}(x)| \qquad |f^{(n+1)}(x)| \leq \max|f^{(n+1)}(x)| \leq M$$

نکته ۲: اگر $g(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$

الف- اگر $n \geq 3$ برای یافتن ماکزیمم تابع $g(x)$ از روشهای ریاضی (۱) استفاده می‌شود.

$g(x)$

$g'(x)=0 \Rightarrow \{ \quad x_M \quad x_m$ نقاط ماکزیمم و مینیمم

به کمک جدول تغییر علامت مشتق، نقاط ماکزیمم و مینیمم می‌توان نوع نقاط را تعیین کرد.

x_M نقطه ماکزیمم $\quad g(x_M)=M_1 \rightarrow$ ماکزیمم

x_m نقطه مینیمم $\quad g(x_m)=M_2 \rightarrow$ مینیمم

$$M_2 \le g(x) \le M_1 \Rightarrow |g(x)| \le Max\{|M_1|,|M_2|\}=A$$

$$|(x-x_0)\cdots(x-x_n)| \le A$$

ب) اگر $n \geq 3$ یا n جمله باشد در اینصورت

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_{n-1} \quad x_n \qquad x$

طول فاصله $= x_n - x_0$

فاصله هر نقطه x از x_0 بیشتر از طول فاصله نیست

$|x-x_0| \le x_n-x_0$

$|x-x_1| \le x_n-x_0$

$\vdots$

$|x-x_n| \le x_n-x_0$

$$\Rightarrow |(x-x_0)\cdots(x-x_n)| \le (x_n-x_0)^{n+1}=A$$

در نهایت

$$|f(x)-P_n(x)| \le \frac{AM}{(n+1)!} < \epsilon = 10^{-3}$$

کران بالای خطای درونیابی

مثال ۱) ـ برای $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}x)$ مطلوبست چندجمله‌ای درونیاب در نقاط
را بیابید و سپس کران بالای خطای درونیابی را بیابید.

$x_0=-1 \quad x_1=0 \quad x_2=1$

که $P_n(x)$ تقریب خوبی برای $f(x)$ است.

در این مسئله $n=2$ و قبل از حل مسئله

$P_2(x)$ چندجمله‌ای حداکثر درجه ۲ است.

چون که جدول متساوی الفاصله است یعنی بین روش نیوتن پیشرو و پسرو استفاده می‌شود.

$x_1-x_0=x_2-x_1=h=1$

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$
-1	$f_0=-1$	$\Delta f_0=+1$	$\Delta^2 f_0=0$
0	0		
1	1	$\Delta f_1=1$	

$h=1$

$\rightarrow$ اولین سطر f_0 می‌شود

$P_2(x) = f_0 + S\Delta f_0 + \frac{S(S-1)}{2!}\Delta^2 f_0$

$x = -1 + S$ یا $S = x+1$

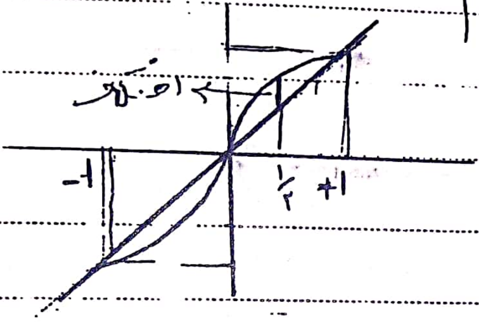
که $x = x_0 + Sh$ و در این مسئله

$P_2(x) = -1 + S = -1 + x + 1 \Rightarrow P_2(x) = x$

مطلوب است $f(\frac{1}{2})$ ؟

$\begin{cases} f(\frac{1}{2}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ P_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\left|f(\frac{1}{2}) - P_2(\frac{1}{2})\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right| \cong 0{,}2$



$f(x) \cong P_2(x)$

$\sin(\frac{\pi}{2}x) \cong x$

تقریب خوبی نیست فقط نقاط نزدیک $-1 = x_0 \leq x \leq x_2 = 1$

-1 و $+1$ و 0 تقریب خوبی است.

می‌دانیم فرمول خطای درونیابی تابع $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ در نقاط $x_0 = -1$ و $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$ برابر است با

$f(x) - P_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(2+1)!} f^{(2+1)}(z)$

نکته ۱) محاسبه مشتق سوم تابع $f(x)$:

$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$ و $f''(x) = \frac{-\pi^2}{4}\sin(\frac{\pi}{2}x)$ و $f'''(x) = \frac{-\pi^3}{8}\cos(\frac{\pi}{2}x)$

نکته ۲) قرار می‌دهیم

$g(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = (x+1)(x-0)(x-1)$

$g(x) = x(x^2-1) = x^3 - x$

چون $n = 2 < 3$ از روش مشتق‌گیری ماکزیمم $|g(x)|$ را محاسبه می‌کنیم.

$g'(x) = 3x^2 - 1$

$g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \beta = \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

نقاط احتمالی Min و Max

$M_{in}\ \alpha : g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{3} - 1) = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$

$M\ \beta : g(\beta) = \frac{-1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{3} - 1) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

x		$\beta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$		$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$	
$g'(x)$	+	0	−	0	+
	↗	Max	↘	Min	↗

برای $x_1 = -1 \le x \le 1 = x_2$ و در این صورت: $\frac{-2}{3\sqrt{3}} = m_2 \le g(x) \le M_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

عدد بزرگتر انتخاب می شود

$$|g(x)| = |x(x^2-1)| \le \frac{2}{3\sqrt{3}} = A$$

و با توجه به نکته (۱) و (۲)

$$0 \le |f(x)-P_2(x)| = \left|\frac{g(x)}{3!} f^{(n+1)}(z)\right| \le \frac{|g(x)|\,|f^{(n+1)}(z)|}{6} \le \frac{\frac{2}{3\sqrt{3}}}{6} \times \frac{\pi^3}{8}$$

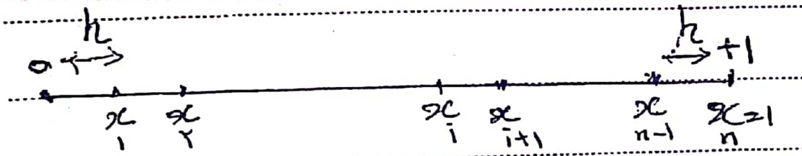
$\frac{2}{18\sqrt{3}}$, $\frac{\pi^3}{8}$, $\frac{\pi^3}{72\sqrt{3}}$

$$|f(x)-P_2(x)| \le \frac{\pi^3}{72\sqrt{3}} = 0{,}24$$

تقریب چندجمله‌ای کمتر از ۰٫۲۴ برابر خوب بود

مثال ۲) برای تابع $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}x)$ بر بازه $[0,1]$، این بازه را به چند قسمت مساوی تقسیم کنیم تا خطای درونیابی از 10^{-3} کمتر یا مساوی باشد.

فرض کنیم بازه $[0,1]$ را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم. $n=?$



$x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n}$, $x_i = \frac{i}{n}$, $i=0,1,\dots,n$

فرمول خطای درونیابی در $x_0, x_1, \dots, x_n$

$$|f(x)-P_n(x)| = \left|\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}\right| \, |f^{(n+1)}(z)|$$

نکته ۱) برای $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}x)$

$$f' = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$$
$$f'' = -(\frac{\pi}{2})^2\sin(\frac{\pi}{2}x)$$
$$f''' = -(\frac{\pi}{2})^3\cos(\frac{\pi}{2}x)$$
$$f^{(n+1)}(x) = \pm(\frac{\pi}{2})^{n+1}\,{\sin \atop \cos}(\frac{\pi}{2}x) \Rightarrow |f^{(n+1)}(x)| \le (\frac{\pi}{2})^{n+1} = M$$

نکته ۲)

چون n مجهول است پس

$$g(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$
$$|g(x)| = |(x-x_0)\cdots(x-x_n)| \le (x-x_0)\cdots(x-x_n) = (x_n-x_0)^{n+1} = 1 = A$$

Subject

Date

$$|f(x)-P_n(x)| = \frac{|g(x)||f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \leq \frac{1\times(\frac{\pi}{2})^{n+1}}{(n+1)!}$$ کران بالای خطای درونیابی

طبق فرض باید $\frac{(\frac{\pi}{2})^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-3}$ و اولین n طبیعی که در این رابطه صدق می‌کند

جواب مسئله است. با کمک ماشین حساب میتوان برای همه مقادیر n ها آزمایش کرد تا جواب بدست آید.

$$n=1 \Rightarrow \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2!} = \frac{\pi^2}{8} \leq 10^{-3} \; ?$$

$$n=2 \Rightarrow \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{3!} = \frac{\pi^3}{48} \leq 10^{-3}$$

$$\log\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - \log(n+1)! \leq -3 \qquad n=1 \Rightarrow 2A-\log 2 \leq -3$$

$$(n+1)\underbrace{\log\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{A} - \log(n+1)! \leq -3 \qquad n=2 \Rightarrow 3A-\log 6 \leq -3$$

جلسه نوزدهم ۱۳۹۸/۹/۲۳

روش کمترین مربعات: همان رگرسیون

یادآوری: درونیابی
- روش لاگرانژ
- روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن
- روش پیشرو و پسرو

سوال

خطای درونیابی:

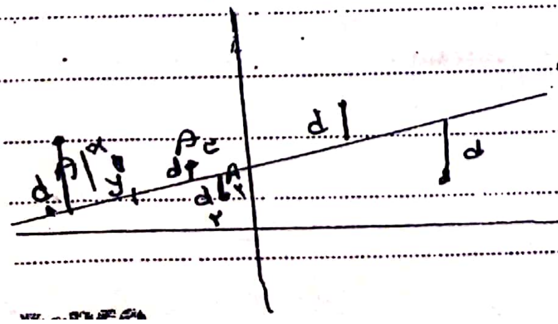
فرض کنید در صفحه نقاط

با اندیس ۱ شروع می‌شود

$A_1\begin{vmatrix}x_1\\y_1\end{vmatrix} \quad A_2\begin{vmatrix}x_2\\y_2\end{vmatrix} \quad \cdots \quad A_n\begin{vmatrix}x_n\\y_n\end{vmatrix}$

مفروض هستند اگر تابع $P(x)$ چنان باشد که مجموع مربعات فواصل عرضی نقاط تا تابع $P(x)$ مینیمم شود در این صورت $P(x)$ را تابع کمترین مربعات این مجموعه نقاط نامیم.

$P(x)$ چند جمله‌ای است.



فاصله عرضی نقطه اول تا $P(x)$ = $d_1 = y_1 - P(x_1)$

$d_2 = P(x_2) - y_2$

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left(p(x_i)-y_i\right)^2$$

برای یافتن تابع کمترین مربعات $p(x)$ به شکل چند جمله‌ای از تعریف استفاده کرده و عبارت S را مینیمم می‌کنیم. (با مینیمم شود)

$p(x)=ax+b$ $\qquad (u^2)'=2uu'$

الف-۱ خط کمترین مربعات

با جایگذاری در عبارت S داریم:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left[(a x_i+b)-y_i\right]^2$$

مجهول — معلوم — مجهول

هدف مینیمم کردن عبارت S است بنابراین:

تعادل های آن را پیدا کنیم

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial a}=0\\[2mm] \dfrac{\partial S}{\partial b}=0\end{cases}\Rightarrow \quad 2\sum_{i=1}^{n}x_i(ax_i+b-y_i)=0 \qquad 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0$$

دو معادله دو مجهول ⇐ ضرب و ساده می‌کنیم تا

$$\begin{cases}a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\\[2mm] a\sum_{i=1}^{n}x_i+nb=\sum_{i=1}^{n}y_i\end{cases}$$

با حل دستگاه مقابل a و b را یافته و پس خط کمترین مربعات $p(x)=ax+b$ پیدا می‌شود.

از جدول هر چه در هست و نیاز داریم می‌سازیم

مثال: برای مجموعه نقاط زیر یک خط کمترین مربعات می‌توان یافت یا خیر؟

از اینجا شروع می‌شود.

x_i	-1	0	1	2
y_i	1	1	0	-1
x_i^2	1	0	1	4
x_iy_i	-1	0	0	-2

$\sum_{i=1}^{4}x_i=2$

$\sum_{i=1}^{4}y_i=1$ $\qquad$ تعداد نقاط $n=4$

$\sum_{i=1}^{4}x_i^2=6$

$\sum_{i=1}^{4}x_iy_i=-3$

$$\begin{cases}6a+2b=-3\\ 2a+4b=1\end{cases}$$

دستگاه حاصل را حل می‌کنیم

$-10b=-6 \Rightarrow b=0/6$ و $a=\dfrac{-4/2}{6}=-0/7$

الف-۲ سهمی کمترین مربعات به شکل

$p(x)=ax^2+b$

با جایگذاری در عبارت S داریم:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left[(a x_i^2+b)-y_i\right]^2$$

مجهول

PAPCO

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 (a x_i^2 + b - y_i) = 0$$

هدف مینیمم کردن عبارت S است بنابراین :

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} 1 \times (a x_i^2 + b - y_i) = 0$$

اگر دستگاه جواب نداشت خط با معادله فوق رو بنویسیم

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

$\longrightarrow$ از ایجاد دستگاه را بدست آورده و از دستگاه دو معادله دو مجهول مقادیر a و b را بدست می‌آوریم

ب_ اگر تابع $P(x)$ به شکل چندجمله‌ای نباشد یعنی به فرم

$$P(x) = \frac{1}{ax+b} \quad (I) \longrightarrow$$

اگر توان ۲ داشت باز هم مثل قبل تبدیل

یا $P(x) = a e^{bx}$ یا (II) نتیجه $\frac{1}{y} = ax^2+b$ گرفته و از همان فرمول استفاده

I) تابع را تبدیل به تابع خطی می‌کنیم

$$y = \frac{1}{ax+b} \Longrightarrow ax+b = \frac{1}{y}$$

با دستگاه از تغییر متغیر :

$$X = x$$

$$Y = aX + b \qquad \text{داریم} \qquad Y = \frac{1}{y}$$

و خط کمترین مربعات برای دستگاه X و Y را بدست می‌آوریم

$$a\sum_{i=1}^{n} X_i + b\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum X_i Y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{n} X_i + nb = \sum Y_i$$

همان فرمول خط $ax+b$ می‌باشد فقط بجای x و y کوچک X و Y بزرگ می‌نویسیم

مثال: برای جدول زیر یک تابع کمترین مربعات به شکل

$$y = \frac{1}{ax+b}$$

x_i	-1	0	1	2
y_i	1	1	2	-1
X_i	-1	0	1	2
Y_i	1	1	$\frac{1}{2}$	-1
X_i^2	1	0	1	4
X_iY_i	-1	0	$\frac{1}{2}$	-2

$\sum X_i = 2$

$\sum Y_i = \frac{3}{2}$

$\sum X_i^2 = 6$

Subject
Date

ع م (۳۸)

$y=ae^{bx} \Rightarrow \ln y = \ln a + \ln e^{bx}$

$\ln y = bx + \ln a$

$Y = bX + c$ $\qquad a=e^{c} \qquad \ln a = c$ $\qquad$ (II

۱۳۹۸,۹,۲۴

جلسه بیستم (۳۸)

انتگرال گیری عددی:

$I=\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$

$F'(x)=f(x)$

هدف حل عددی

یافتن تقریب های عددی برای I.

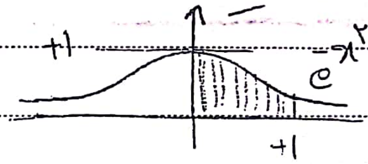
مثال:

$I=\int_0^1 e^{-x^2}dx = F(x)\Big|_0^1 = ?$ $\qquad F'(x)=e^{-x^2}$

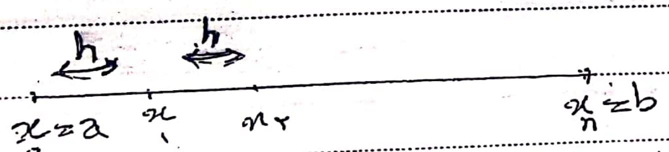
چون F نداریم فقط مجبور
انتگرال ها را تقریب بزنیم

$0<e^{-x^2}<1$

$0<\int_0^1 e^{-x^2}dx<\int_0^1 1\,dx \Rightarrow 0<I<1$



در کلیه روش های انتگرال گیری تقریبی $I=\int_a^b f(x)\,dx$ بازه $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می کنیم



$h=\frac{b-a}{n}$ گام یا ترد

$n=\frac{b-a}{h}\in N$

$x_1=x_0+h$

$x_2=x_0+2h$

$x_i=x_0+ih \qquad i=0,1,2,\dots,n$

پس جدول زیر را تکمیل می کنیم

تا هر چند رقم که بخواهیم در جدول حساب می شود

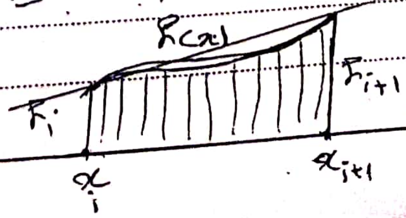
x_i	x_0	x_1	...	x_i	...	x_n
f_i	f_0	f_1		f_i		f_n

و به کمک جدول بالا انتگرال I را تقریب می زنیم

۱- روش ذوزنقه ای:

$I=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$

مساحت ذوزنقه



PAPCO

Scanned by CamScanner