جلسهٔ دوم

مثال: مطلوب است چندجمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر به کمک روش نیوتن پیشرو، مطلوب است تقریبی از $f(1.2)$

	x_i	f_i	تفاضلات مرتبه اول (برای دو نقطه)	تفاضلات مرتبه دوم (برای سه نقطه)	تفاضلات مرتبه سوم (برای چهار نقطه)
x_0	-1	-2			
x_1	1	0	$a_1=\frac{0-(-2)}{1-(-1)}=1$	$a_2=\frac{7-1}{2-(-1)}=2$	
x_2	2	7	$\frac{7-0}{2-1}=7$	$\frac{19-7}{3-1}=6$	$a_3=\frac{6-2}{3-(-1)}=1$
x_3	3	26	$\frac{26-7}{3-2}=19$		

ممکن است ستون دوم را حذف کنند. مثلاً $f(x)$ به فرم $\sinh x$ یا $e^{-\sqrt{x}}$ است. اشتباه در محاسبات هم اگر بکنید، تمامش اشتباه می‌شود.

چندجمله‌ای درونیاب دقیقاً درجه 3 است (اگر کمتر بود، به این سرعت به جواب نمی‌رسید این درجه پیدا نمی‌شد)

$$P_3(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$=-2+1(x+1)+2(x+1)(x-1)+1(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$f(1.2)\simeq P_3(1.2)=\dots$$

در صورتی خطا را می‌توانید حساب کنید که مثلاً $f(x)$ مثل $\sinh x$ داده شده باشد. $\longrightarrow$ فرمول خطا: $f(x)-P_3(x)=\dots$

$|f(x)-P_3(x)|<\varepsilon$ باید باشد تا تقریب ما خوب باشد.

فرمول خطای چندجمله‌ای درونیاب:

اگر $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط متمایز و $f_0, \dots, f_n$ مقادیر تابع f در این نقاط باشند، اگر مشتق $(n+1)$اُم تابع $f(x)$ موجود باشد، در این صورت اگر $P_n(x)$ چندجمله‌ای درونیاب تابع $f(x)$ در نقاط $x_i\ (i=0,1,\dots,n)$ باشد آنگاه:

$$f(x)-P_n(x)=\frac{(x-x_0)\dots(x-x_i)\dots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(z) \qquad x_0<z<x_n$$

خطا به مقدار x بستگی دارد. خطا را می‌خواهند دقت کنید.

نکته: اگر فرض کنیم مشتق $(n+1)$ ام تابع f کراندار باشد $|f^{(n+1)}(x)| \le M$

$x_0 \le x \le x_n$

کران بالای خطا وابسته به x

آنگاه $|f(x) - P_n(x)| \le |(x-x_0)\cdots(x-x_n)| \frac{M}{(n+1)!}$

چون کران با x تغییر می‌کنه، باید یک کران دیگه پیدا کنیم که مستقل از x باشه.

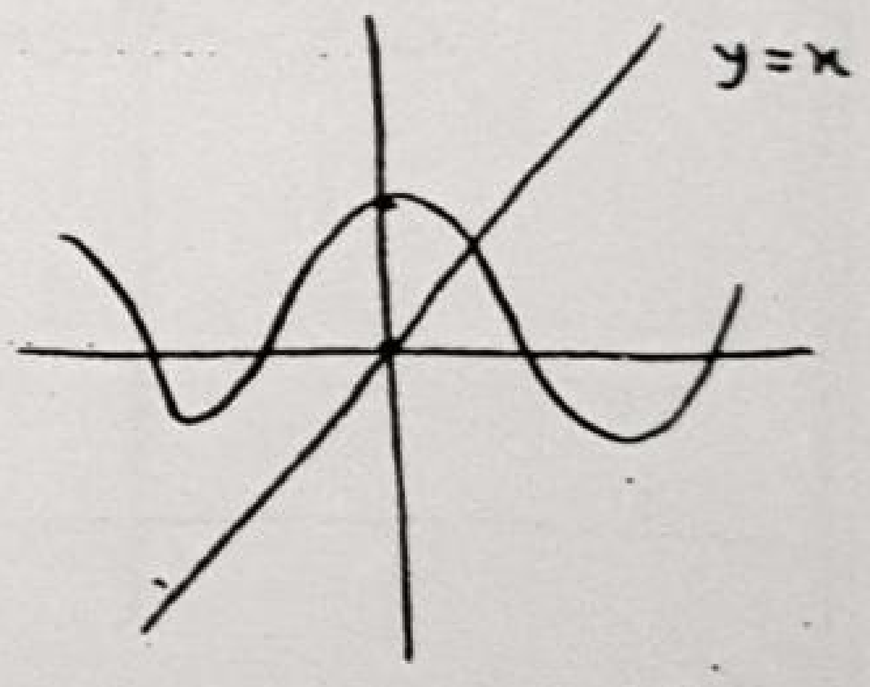
مثال: تابع $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ را در نظر گرفته، چندجمله‌ای درونیاب آن را در $x_0=-1$، $x_1=0$، $x_2=1$ محاسبه کنید؟ کران بالای خطای درونیابی را بیابید!

$n=2$

x_i	f_i	برای درونیابی مرتبه اول	برای سهمی مرتبه دوم
-1	$-1=a_0$		
		$\frac{0-(-1)}{0-(-1)}=1=a_1$	
0	0		$\frac{1-1}{1-(-1)}=0=a_2$
		$\frac{1-0}{1-0}=1$	
1	1		

بنابراین، چندجمله‌ای حتماً درجه 1 است؛ چون $a_2=0$:

$$P_1(x) = -1 + 1(x-1) = x$$



می‌بینید که اصلاً تابع تقریب زن خوبی نیست. $\sin$ متناوب است اما $y=x$ خط راست است.

در حقیقت $-1 \le x \le 1$ $\quad f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x) \simeq x$

$n=2$: $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$

$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$

$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4}\sin(\frac{\pi}{2}x)$

$f^{(n+1)}(x) = f^{(3)}(x) = -\frac{\pi^3}{8}\cos(\frac{\pi}{2}x)$, $\quad |f^{(3)}(x)|_{-1\le x\le 1} \le \frac{\pi^3}{8}$

بنا به فرمول خطا $\quad |f(x) - P_1(x)| \le |\overbrace{(x+1)(x-0)(x-1)}^{g(x)}| \frac{\frac{\pi^3}{8}}{(2+1)!}$

$x=\frac{1}{2}$: $|f(\frac{1}{2}) - P_1(\frac{1}{2})| \le \frac{\pi^3}{48} |(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)|$

$x=\frac{1}{3}$: $|f(\frac{1}{3}) - P_1(\frac{1}{3})| \le \cdots$

$g(x) = x(x^2-1) = x^2 - x$

با فرض روش سرورد

ماکزیمم این تابع را بر $[-1, 1]$ می یابیم. برای بدست آوردن ماکزیمم، مشتق اش رو صفر میگذارم.

$g'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \rightarrow$ نقاط اکسترمم $g(x)$
$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt3} \rightarrow g(x_1) = \frac{1}{\sqrt3}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{-2}{3\sqrt3} \\ x_2 = \frac{-1}{\sqrt3} \rightarrow g(x_2) = \frac{+2}{3\sqrt3} \end{cases}$ ✓ این ماکزیممه

$$\rightarrow \frac{-2}{3\sqrt3} \le g(x) \le \frac{2}{3\sqrt3} \rightarrow |g(x)| \le \frac{2}{3\sqrt3}$$
$$(-1 \le x \le 1)$$

(اگر $-3 \le g(x) \le 2 \longrightarrow |g(x)| \le 3$)

$$\rightarrow |f(x) - P_1(x)| \le \frac{2}{3\sqrt3} \frac{h^3}{48}$$

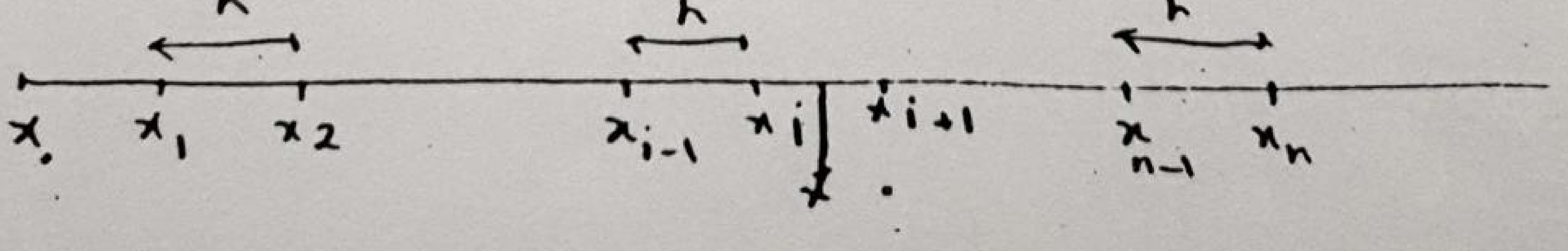
معمولاً اگر چنین سوالی بدهند، $n=2$ می شود. چون حساب کردنش راحت باشد.

از فصل 3 ⟨ جدول (حتماً سوال هست) / یه سوال مربوط به خطا یا یک چیزی در آخر فصل ۴ میگم

روش تفاضلات پیشرو و پسرو نیوتن:

روش نیوتن برای نقاط جدولی متساوی الفاصله و غیر متساوی الفاصله قابل استفاده است، اما اگر فاصله نقاط جدول برابر باشد یعنی $x_{i+1} - x_i = h \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$

اگر یکیش فاصلش تغییر کرد، حتماً باید از نیوتن استفاده کنید.



$$x = x_1 + sh \qquad 0 \le s \le 1$$
$\vdots$

* عملگر Δ (دلتا) یا تفاضل پیشرو:

$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \qquad i = 0, \dots, n-1$ تفاضل پیشرو مرتبه اول

یعنی $\Delta f_0 = f_1 - f_0$
$\Delta f_1 = f_2 - f_1$

در حقیقت $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{\underbrace{x_{i+1} - x_i}_{h}}$

تفاضل پیشرو مرتبه دوم $\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$

مثلا $\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$

$\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1$

به طور مشابه $\Delta^3 f_i$, ... تعریف می شوند.

* جدول تفاضلات پیشرو: (اکثرا یکی کم میشه)

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
x_0	f_0	$\Delta f_0 = f_1 - f_0$		
x_1	f_1	$\Delta f_1 = f_2 - f_1$	$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$	$\Delta^3 f_0$
x_2	f_2	$\Delta f_2 = f_3 - f_2$	$\Delta^2 f_1 = \cdots$	$\Delta^3 f_1$
	f_3			$\Delta^3 f_2$
$\vdots$		$\vdots$		
x_i	f_i	$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$		$\vdots$
x_{i+1}	f_{i+1}		$\Delta^2 f_i = \cdots$	
x_{i+2}	f_{i+2}	$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$			
x_{n-1}	f_{n-1}	$\Delta f_{n-1} = f_n - f_{n-1}$	$\Delta^2 f \cdots$	
x_n	f_n			

Δf_n وجود نداره. چون از ته جدول حذف میشه.

$\Delta^2 f_{n-1}$ وجود نداره. به همین ترتیب، از ته جدول کم می شه.

با استفاده از جدول تفاضلات را جاگذاری می کنیم

روش نیوتن برای تفاضلات پیشرو $P_n(x) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots$

روش چند جمله ای درونیاب براساس نقطه x_0 $\quad x = x_0 + sh$ یا $s = \frac{x - x_0}{h}$

با معلوم بودن x ، s قابل محاسبه است.

$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$

$a_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f_0}{h} \qquad a_2 = f[x_0 \ldots x_2]$

$x - x_0 = sh$

مثال: چند جمله ای درونیاب نیوتن را برای تابع جدولی زیر بیابید.
مطلوبست تقریبی از $f(1.1)$؟
چند جمله ای درونیاب را بر اساس نقطه x_1 نوشته و سپس تقریبی از $f(2.1)$ بیابید.

$n=3$

$x_0=1$, $h=1$, $x_1=2$, $h=1$, $x_2=3$, $h=1$

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
1	2			
		$\Delta f_0 = 5-2=3$		
2	5		$\Delta^2 f_0 = 2$	
		$\Delta f_1 = 5$		$\Delta^3 f_0 = 0$
3	10		$\Delta^2 f_1 = 2$	
		$\Delta f_2 = 7$		
4	17			

S و x وابسته هستند

چند جمله ای نیوتن بر اساس نقطه x_0

$$x = x_0 + sh = x_0 + s = 1 + s \longrightarrow s = x-1$$

$$P(x) = f_0 + s\,\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0$$

$$= 2 + 3s + s(s-1)$$

$$f(1.1) = ? \longrightarrow \begin{cases} x = 1.1 \\ s = x-1 = 0.1 \end{cases}$$

$$f(1.1) \simeq P(1.1) = 2 + 0.3 + 0.1(0.1-1)$$

اگر $f(2.1) = ? \longrightarrow \begin{cases} x = 2.1 \\ s = x-1 = 1.1 \end{cases}$

$$P(2.1) = 2 + 3(1.1) + 1.1(1.1-1) \longleftarrow$$ اما این درست نیست

چند جمله ای نیوتن بر اساس نقطه x_1

$$x = x_1 + sh = x_1 + s = 2 + s \longrightarrow s = x-2$$

$$p(x) = f_1 + s\,\Delta f_1 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_1$$

$$P(x) = 5 + 5s + s(s-1).$$

نزدیکترین نقطه جدول به $x=2.1$ نقطه $x_1=2$ است بنابراین چند جمله ای بر اساس x_1 نوشته می شود.

$$x = 2.1 \longrightarrow s = x-2 = 0.1$$

$$P(2.1) \simeq 5 + 0.5 + 0.1(0.1-1) \longleftarrow$$ این درست است.

$f(3.8)$ $\quad P(x) = f_3$

چند جمله ای بر اساس

$x_1 = 3$ نقطه

(چیزی محاسبه نیست.)

ما برای هر نقطه ای امتداد جدول، از این روش استفاده می‌کنیم.

نکته: روش پیشرو برای محاسبه مقادیر $f(x)$ وقتی x نزدیک به ابتدای جدول است، قابل استفاده است.

جلسه نهم:

تفاضلات پسرو و چند جمله ای پسرو نیوتن:

برای تعیین مقدار $f(x)$ وقتی x نزدیک به انتهای جدول است، از عملگر پسرو نیوتن مشابه عملگر پیشرو استفاده می‌کنیم.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
x_0	f_0	Δf_0		
x_1			$\Delta^2 f_0$	
x_2				
$\vdots$				
x_n				

h

x_0 بر حسب: $P(x) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \cdots \quad x = x_0 + sh$

x_1 برحسب: $P(x) = f_1 + s\Delta f_1 + \cdots \Delta^n f_1 + \cdots \quad x = x_1 + sh$

$f(2.01) \longrightarrow x_1 = 2$

$f(1.9) \longrightarrow x_1 = 2$

عملگر تفاضلات پسرو ∇ (نابلا) (برای پیشرو Δ بود.)

پسرو مرتبه اول:

$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, n$

که برای پیشرو از ۰ تا $n-1$ بود.

که به خاطر اینکه از اندیس ماقبلش استفاده می‌کند.

$\Delta f_0 = f_1 - f_0 = \nabla f_1$

$\Delta f_1 = f_2 - f_1 = \nabla f_2$

$\vdots$

$\Delta f_{n-1} = f_n - f_{n-1} = \nabla f_n$

پسرو مرتبه دوم $\nabla^2 f_i$

$\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1}) = \nabla f_i - \nabla f_{i-1} \quad i = 2, 3, \dots, n$

که در پیشرو، از طرف n کم می‌شد یعنی از ۱ تا $n-1$.

به طور مشابه داریم:

$\nabla^3 f_i \quad i = 3, 4, \dots, n$

$\nabla^4 f_i$

بستگی به اینکه سر امتحان، کدوم رو بخواهند

جدول تفاضلات پسرو

x_i	f_i	Δf_i یا ∇f_i	$\Delta^2 f_i$ یا $\nabla^2 f_i$	
x_0	f_0			
		$\Delta f_0 = \nabla f_1$		
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0 = \nabla^2 f_2$	$\nabla^3 f_3$
x_2	f_2	$\Delta f_1 = \nabla f_2$	$\Delta^2 f_1 = \nabla^2 f_3$	
x_3	f_3	$\Delta f_2 = \nabla f_3$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
x_i	f_i			
		$\Delta f_i = \nabla f_{i+1}$		
x_{i+1}	f_{i+1}			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
x_{n-1}	f_{n-1}		$\Delta^2 f_{n-2} = \nabla^2 f_n$	$\nabla^3 f_n$
		$\Delta f_{n-1} = \nabla f_n$		
x_n	f_n			

$$x = x_n + sh \qquad s = -1 \longrightarrow x = x_n - h$$

$$s = \frac{-1}{2} \longrightarrow x = x_n - \frac{h}{2}$$

چندجمله‌ای درونیاب براساس f_n

$$P(x) = f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f_n + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 f_n + \cdots$$

سر امتحان بسته به اینکه xای ازتون خواستن تا مقدار تقریبی f را در آنجا بدست بیاورید، یعنی از اول جدول باشه یا آخر جدول، از پیشرو یا پسرو استفاده می‌کنید.

خلاصه روش‌های تقریب زدن که گفتیم:
- لاگرانژ
- نیوتن
- پیشرو نیوتن
- پسرو نیوتن

مثال: چند جمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را یافته و تقریبی از $f(1.1)$ و $f(3.9)$ بیابید.

x_i	1	2	3	4
f_i	5	11	21	35

x_i	f_i	Δf_i یا ∇f_i	$\Delta^2 f_i$ یا $\nabla^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$ یا $\nabla^3 f_i$
$1.1 \leftarrow 1$	5			
		$\Delta f_0 = 6 = \nabla f_1$		
2	11		$\Delta^2 f_0 = 4 = \nabla^2 f_2$	0
		$\Delta f_1 = 10 = \nabla f_2$		
3	21		$\Delta^2 f_1 = 4 = \nabla^2 f_3$	
		$\Delta f_2 = 14 = \nabla f_3$		
$3.9 \leftarrow 4$	35			

چون $x = 3.9$ نزدیک به نقطه $x_3 = 4$ و انتهای جدول است

$$x = 3.9 \longrightarrow s = -0.1$$

$$x = x_3 + sh = 4 + s$$

$$p(x) = f_3 + s\nabla f_3 + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f_3 + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 f_n$$

$$f(3.9) \simeq P(3.9) = 35 + 14(-0.1) + \frac{(-0.1)(-0.1+1)}{2} \times 4$$

برای $x = 1.1$ هم از همان پیشرو نیوتن می‌بریم. شبیه مثال حل شده در جلسه قبل

سر امتحان به احتمال ۹۰٪، از پیشرو و پسرو سوال می‌دهند.

اگر $\nabla f_1 = 0.00051$ (3D) $\longleftarrow$ در جدول باید 0.001 بگذارید.

اگر $\nabla f_1 = 0.00051$ (2D) $\longleftarrow$ عدد 0 بگذارید.

در سر امتحان، هر عدد، 0.25 نمره دارد. کلاً عددها 2.5 نمره - فرمولش 0.75 ...
آخرش بین می‌خواستند 18 بشند 10 می‌شند.

تقریب کمترین مربعات:

فرض کنیم در صفحه مختصات، نقاط (x_i, y_i) $i = 1,2,\dots,n$

← از صفر شروع می‌شه

مفروض باشد اگر تابع $P(x)$ چنان باشد که مجموع مربعات تفاضلات عرضی این تابع تا نقاط مفروض کمینه باشد در این صورت تابع $P(x)$ را یک تقریب کمترین مربعات برای این داده‌ها می‌نامیم.

(3D)

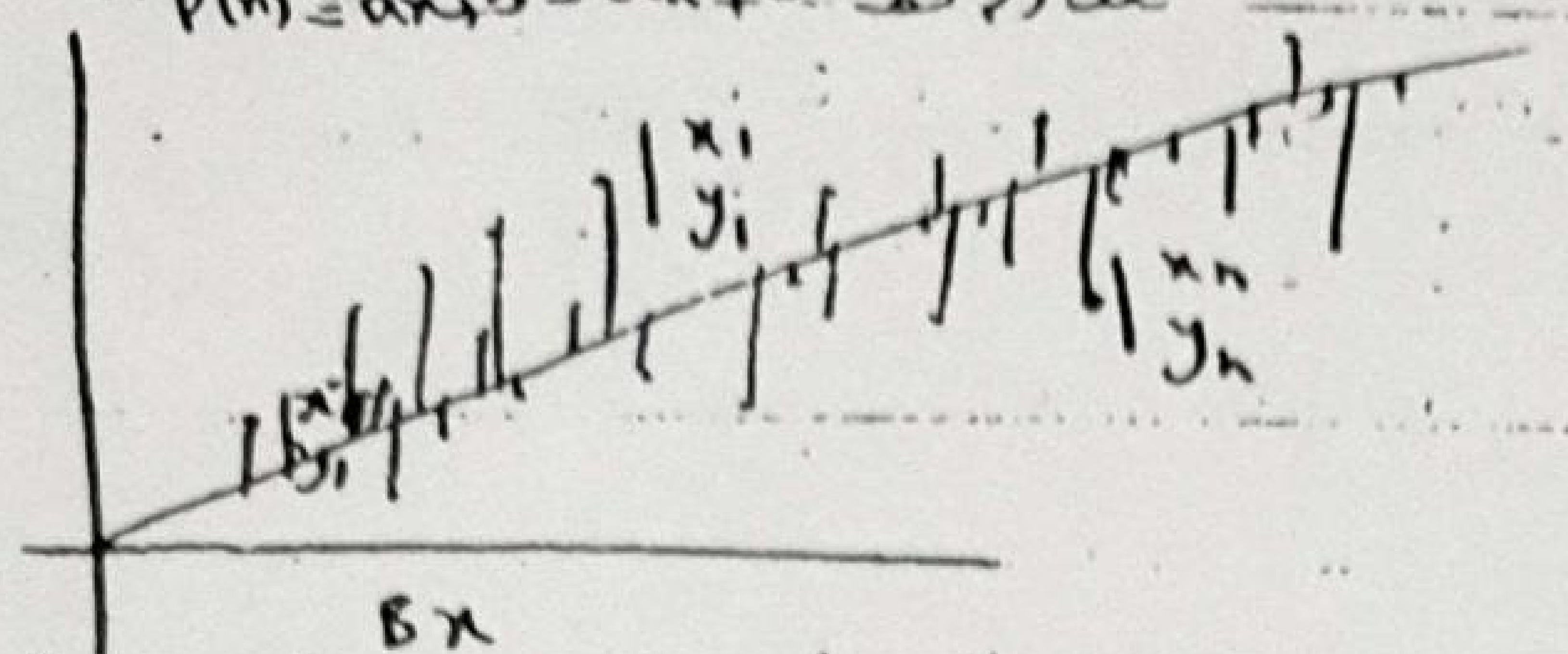
x_i	0	1	2
f_i	$\sqrt{2}$	π	e

$f(0) = \sqrt{2} \simeq 1.4142\dots$

$f(1) = \pi \simeq 3.14$

$f(2) = e \cong 2.718$

$p(x) = ax+b \overset{\text{یا}}{=} ax^2+b$ معادله خط



برای اینکه تمام جملات مثبت شوند.

$$S = \sum_{i=1}^{n} (p(x_i) - y_i)^2$$

S باید کمترین شود.

$p(x) = Ae^{Bx}$ معادله خط ـ مرتبط

یا $p(x) = \dfrac{1}{ax+b}$

$P(x) = ax+b$

* خط کمترین مربعات :

برای محاسبه خط کمترین مربعات باید عبارت $S = \sum_{i=1}^{n} (P(x_i) - y_i)^2$ مینیمم شود.

$$S = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 = f(a,b)$$

S مینیمم است اگر

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 2x_i(ax_i + b - y_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{n} b}}_{nb} = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \xrightarrow{\text{با حل دستگاه}} \begin{array}{l} a = \checkmark \\ b = \checkmark \end{array}$$

مثلاً جدول روبرو را با درونیابی هیچوقت تقریب نمی‌توانیم بزنیم چون باید سری بنویسیم

x_i	f_i
0	π
1	$\sqrt{2}$
2	e

مثلاً تا 3D . بعد ها یا اول اعداد بدست نمی‌آید

امّا با روش خط کمترین مربعات می‌توان تقریب زد.

حال مثلاً $P(x) = ax^2+b$ یا ... باشد، همین روش است، فقط توان‌ها تغییر می‌کند و یا 3 معادله 3 مجهول یا ... (بیشتر) می‌شود.

مثال: برای داده های جدول زیر یک تابع کمترین مربعات به شکل $P(x)=Ae^{Bx}$ بیابید.

نکته سوال: حتماً از $\ln$ ها باید استفاده کنید.

x_i	1	2	3
y_i	-1	1	4

$$y=Ae^{Bx} \rightarrow \ln y=\ln A+\ln e^{Bx} \rightarrow Y=\ln A+Bx$$

به فرم خط تبدیل کردیم.

$Y=\ln y \qquad a=B$

$X=x \qquad b=\ln A \qquad Y=aX+b$

پس جدول X و Y را می کشیم.

X_i	1	2	3
Y_i	$\ln 2$	$\ln 1$	$\ln 4$

$$\begin{cases} a\left(\sum^{3} X_i^2\right)+b\left(\sum^{3} X_i\right)=\sum^{3} X_i Y_i \\ a\left(\sum X_i\right)+3b=\sum Y_i \end{cases}$$

این دو معادله دو مجهول را حل می کنیم a و b را بدست می آوریم.

اگر $P(x)=\frac{1}{ax+b}$ می نویسند $\frac{1}{y}=ax+b \leftarrow Y=ax+b$

(دوباره معادله خط ساختیم.)

البته تو این مثال، همه اعداد رند بود. اگر $\sqrt{2}$ می گذاشتیم، می شد از درونیابی استفاده کرد. اگر فرم تابع رو بدهند و اعداد هم، رند باشند، درونیابی بهتر است چون بعد می توانیم خطای درونیابی را هم بدست آوریم.

فصل 4: انتگرال گیری عددی $\int_a^b f(x)\,dx$

$\int^{1} e^{-x^2}dx=?$ این انتگرال را تحلیلی نمی شه حل کرد. تقریبش رو با روش عددی می شود بدست آورد.

ابتدا بازه $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می کنیم

طول گام $h=\frac{b-a}{n}$

$a=x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_i \quad \dots \quad b=x_n$

$x_i=x_0+ih \qquad i=0,1,2,\dots,n$