ع ۳۸

$$y = ae^{bx} \Rightarrow \ln y = \ln a + \ln e^{bx}$$

$$\ln y = bx + \ln a \qquad \text{(II}$$

$$Y = bX + C \qquad a = e^{C} \qquad \ln a = C$$

۱۳۹۸,۹,۲۴

جلسه بیستم (۳۸)

۱. انتگرال گیری عددی:

هدف حل عددی

یا یافتن تقریب های عددی برای I.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

$$F'(x) = f(x)$$

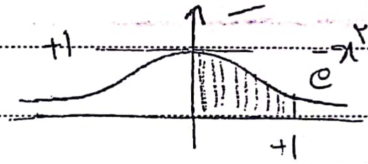
مثال ۱:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}dx = F(x)\Big|_0^1 = ? \qquad F'(x) = e^{-x^2}$$

حل: بنابراین فقط حدود انتگرال را حساب می کنیم

$$0 < e^{-x^2} < 1$$

$$0 < \int e^{-x^2}dx < \int_0^1 1\,dx \Rightarrow 0 < I < 1$$



دیگر روش های انتگرال گیری تقریبی $I = \int_a^b f(x)\,dx$ بازه $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می کنیم

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$x_0 = a \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n = b$ (گام بازه)

$$n = \frac{b-a}{h} \in \mathbb{N}$$

$$x_1 = x_0 + h$$

$$x_2 = x_0 + 2h$$

$$x_i = x_0 + ih \qquad i = 0,1,2,\dots,n$$

تا چند رقم اعشار بخواهیم در نظر گرفته می شود

پس جدول زیر را تکمیل می کنیم

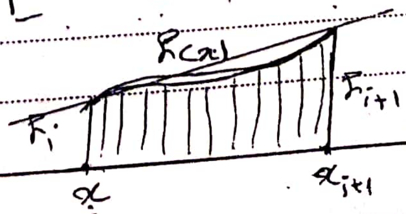
x_i	x_0	x_1	$\dots$ x_i $\dots$	x_n
f_i	f_0	f_1	f_i	f_n

و به کمک جدول بالا انتگرال I را تقریب می زنیم

۱- روش ذوزنقه ای:

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

مساحت ذوزنقه



x_i	f_i	Δf_i
x_i	f_i	
		Δf_i
x_{i+1}	f_{i+1}	

به کمک روش پیشرو نیوتن

$$p_1(x) = f_0 + s\Delta f_0$$

که

$$x = x_0 + sh$$

$$f(x) \cong p_1(x) = f_i + s\Delta f_i \quad , \quad x = x_i + sh$$

در این صورت

$$f(x) \cong p_1(x) = f_i + s\Delta f_i$$

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \cong \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_1(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f_i + s\Delta f_i)\,dx$$

$$= \int_0^1 (f_i + s\Delta f_i)\,h\,ds = h\left[f_i s + \Delta f_i \frac{s^2}{2}\right]_0^1 = h\left[f_i + \frac{\Delta f_i}{2}\right] = \frac{h}{2}$$

$$= \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

حدود انتگرال را تغییر دادیم.

$x = x_i + sh$

$dx = 0 + h\,ds$

x	s
x_i	0
x_{i+1}	1

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \cong \frac{h}{2}\left[f_i + f_{i+1}\right]$$

خطای محاسبه روش ذوزنقه‌ای ساده:

با توجه به خطای درونیابی می‌دانیم خطای درونیابی $p_1(x)$ در نقاط x_{i+1} و x_i برابر است با

$$f(x) - p_1(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(1+1)!} f^{(2)}(z)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_1(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2!} f''(z_x)\,dx$$

$$I_i - \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

از قضیه مقدار میانگین انتگرال‌ها می‌دانیم اگر $f(x)$ پیوسته باشد در این صورت و تابع $g(x)$ هم تغییر علامت ندهد (همواره مثبت یا منفی)

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

$a < c < b$

پیوسته

$f(x)$ پیوسته و

$$g(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1})$$

≥ 0, < 0

$x_i < c < x_{i+1}$

$$I - \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) = \frac{1}{2} f''(c_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)(x-x_{i+1})\,dx = \frac{-h^3}{12} f''(c_i)$$

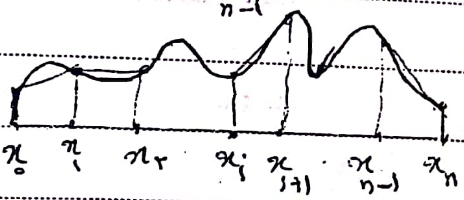
همچنین منفی است پس می‌توان نوشت

$$\boxed{I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \cong \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})}$$

ذوزنقه‌ای مرکب:

$$I = \int_{a=x_0}^{x_n=b} = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + I_i + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n}$$

$$I \cong \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \dots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n)$$



$$I \cong T(h) = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n\right]$$

ذوزنقه‌ای با طول گام h

ضرب ۱ یا ضریب ۲

$$w_0 = \frac{h}{2} \qquad w_1 = w_2 = \dots = w_{n-1} = h \quad , \quad w_n = \frac{h}{2}$$

$$I \cong w_0 f_0 + w_1 f_1 + \dots + w_{n-1} f_{n-1} + w_n f_n$$

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{j=0}^{n} w_j f_j}$$

مثال:

مطلوب است حل انتگرال زیر با روش ذوزنقه‌ای با $h=\frac{1}{2}$ و $h=1$

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$$

چون یک فاصله داریم ذوزنقه‌ای ساده است اگر دو تا می‌شد ذوزنقه‌ای مرکب می‌شد نه ساده.

$$h = 1 \xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{تعداد}} n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{1} = 1$$

$x_0 = 0$, f_0 — $h=1$ — $x_1 = 1$, f_1

$$f_0 = f(x_0) = f(0) = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

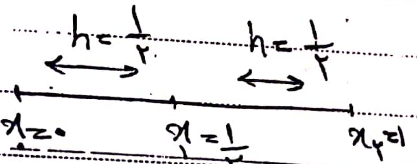
$$f_0 = \lim_{x \to x_0 = 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0} \;\; \text{Hop} \;\; \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 \quad , \quad f_1 = f(x_1) = f(1)$$

$$f(1) = \frac{\ln 2}{1} = \ln 2 = 0$$

اگر لازم شد حتماً یا دو هوپیتال استفاده کنیم

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq T(1) = \frac{1}{2}\left[f_0+f_1\right] = \frac{1+\ln 2}{2}$$

$$h=\frac{1}{2} \Rightarrow n=\frac{b-a}{h}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$



$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{2}\left[f_0+2f_1+f_2\right] \qquad f_0=1 \quad f_1=2\ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad f_2=\ln 2$$

دو طرف ضریب ۱ و وسط ها ضریب ۲ دارد

زمانی از فاصله دو نقطه ای استفاده می کنیم که انتگرال $f(0)$ و $f(x)$ داشته باشد اگر وجود ندارد حل نمی شود.

خطای روش:

$$(1)\ \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f_0+f_1) = \frac{-h^3}{12} f''(c_0) \qquad x_0<c_0<x_1$$

$$(2)\ \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f_1+f_2) = \frac{-h^3}{12} f''(c_1) \qquad x_1<c_1<x_2$$

$\vdots$

$$(n)\ \int_a^b f(x)\,dx - T(h) = \frac{-h^3}{12}\Big[\underbrace{f''(c_0)+\dots+f''(c_{n-1})}_{A}\Big]$$

چون کروشه را می خواهیم جمع بست بود با یک A بنویسیم

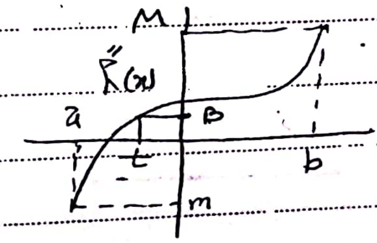
چون $f''(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته است پس دارای ماکزیمم و مینیمم است

$m \le f''(x) \le M$

$m \le f''(c_0) \le M$

$\vdots$

$m \le f''(c_{n-1}) \le M$



در نتیجه $nm \le A \le nM$ و $m \le \frac{A}{n} \le M$

$$m \le \Big[\underbrace{f''(c_0)+\dots+f''(c_{n-1})}_{B}\Big] \le M$$

چون $f''(x)$ پیوسته و $m \le B \le M$ پس $a<t<b$ وجود دارد که

$f''(t)=B$

$f''(c_0)+\dots+f''(c_{n-1}) = n f''(t)$

$$I - T(h) \cong \frac{-h^3}{12} n f''(t) = \frac{-nh \cdot h^2}{12} f''(t)$$ در نهایت

$$I - T(h) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(t)$$

۹۸,۹,۳۰

حیطه تبیین و رفع

یادآوری:

سوال اثبات فرمول ذوزنقه

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong T(h)$$

خطای روش $I - T(h) \cong -\frac{b-a}{12} h^2 f''(t) \qquad a<t<b$

مثال:

مطلوبست مقادیر $y(0)$ و $y(0.25)$ اگر $y(x) = 1 + \int_0^x y(t)e^{-t}\,dt$

برای حل انتگرال در صورت لزوم روش ذوزنقه‌ای با طول گام $h=0.25$ استفاده شود.

$$x=0 \Rightarrow y(0) = 1 + \int_0^0 y(t)e^{-t}\,dt = 1$$

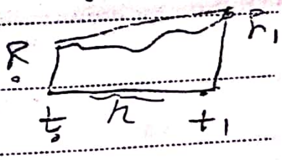
$$x=0.25 \Rightarrow y(0.25) = 1 + \int_0^{0.25} y(t)e^{-t}\,dt \Rightarrow y(0.25) = 1 + I \quad (1)$$

برای حل انتگرال

$$I = \int_0^{0.25} \underbrace{y(t)e^{-t}}_{f(t)}\,dt = \int_0^{0.25} f(t)\,dt \qquad h=0.25$$

$$\Rightarrow n = \frac{b-a}{h} = \frac{0.25-0}{0.25} = 1$$

t	$t_0=0$	$t_1=0.25$
$f(t)=y(t)e^{-t}$	$f_0=y(0)=1$	$f_1=f(0.25)=y(0.25)e^{-0.25}$



$$I \cong T(h) = T(0.25) = \frac{h}{2}(f_0+f_1)$$

روش ذوزنقه‌ای با گام ۰٫۲۵ $\quad I \cong \frac{0.25}{2}\left[1 + y(0.25)e^{-0.25}\right]$

از رابطه (1) داریم $y(0.25) = 1 + I$

$$y(0.25) \cong 1 + \frac{0.25}{2}\left[1 + y(0.25)e^{-0.25}\right] \Rightarrow \underbrace{\left[1 + 0.125e^{-0.25}\right]}_{A} y(0.25) = 1.125$$

$$\Rightarrow y(0.25) = \frac{1.125}{A} = B$$

اگر ۰٫۵ را بخواهد همان روش است فقط عدد عوض می‌شود.

مثال:

جواب حل انتگرال $\int_0^1 e^{\cos(x^2)}\,dx$ به روش ذوزنقه‌ای بازه $[0,1]$ را به چند قسمت مساوی

cos و sin مورد نظر رادیان است

Subject
Date

در این مسئله طول گام را نداده

تعیین کنیم تا خطای تقریبی انتگرال از 10^{-2} کمتر باشد:

فرض کنیم بازه $[0,1]$ را به n قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم یعنی

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n} \quad \text{یا} \quad n=\frac{1}{h}\in \mathbb{N}$$

$h=\frac{1}{n}$

$x_0=0$, x_1 , x_i , x_{n-1} , $x_n=1$

$$I=\int_0^1 e^{\cos(x^2)}\,dx \cong T(h)=?$$ فرض شده $|I-T(h)|<10^{-2}$

می‌دانیم فرمول خطای روش ذوزنقه‌ای برابر است با:

$$I-T(h)\cong -\frac{b-a}{12}h^2 f''(t) \qquad a<t<b$$

$$|I-T(h)|\cong \frac{b-a}{12}h^2|f''(t)| \qquad 0<t<1$$

در این مسئله:

$$f(x)=e^{\cos(x^2)} \quad , \quad f'(x)=(\cos x^2)'\,e^{\cos(x^2)}=-2x\sin x^2 . e^{\cos(x^2)}$$

$$f''(x)=\left|-2\sin x^2 . e^{\cos x^2}-4x^2\cos x^2\, e^{\cos x^2}+4x^2\sin^2 x^2 . e^{\cos(x^2)}\right|$$

می‌دانیم اگر $0<x<1$ داریم:

$$0<x^2<1 \xrightarrow{\text{تابع نزولی است}} \cos 1<\cos(x^2)<\cos 0=1$$

صعودی است e^x $\Longrightarrow e^{\cos 1}<e^{\cos(x^2)}<e^1$

و همچنین برای $0<x<1$ بدیهی است که

$$|\sin x^2|\le 1 \quad , \quad |\cos x^2|\le 1 \quad , \quad |\sin^2(x^2)|\le 1$$

$$x<1 \quad , \quad x^2<1$$

$$|f''(x)|\le 2|\sin x^2||e^{\cos x^2}|+4|x^2||\cos x^2||e^{\cos(x^2)}|+4|x^2||\sin^2(x^2)||e^{\cos(x^2)}|$$

$$|f''(x)|\le 2e+4e+4e=10e$$

$$|I-T(h)|\cong \frac{1-0}{12}h^2|f''(t)| \qquad 0<t<1$$

$$|I-T(h)|\le \frac{h^2}{12}10e<10^{-2}$$ صدق شده $\Longrightarrow h^2<\frac{0.12}{10e}=\frac{0.12}{27.182}\cong 0.00441$

$$h^2\le\frac{0.12}{10e}$$

$$h\le\sqrt{0.00441}\cong 0.066$$ طول گام

$$n=\frac{1}{h}\ge\frac{1}{0.066}=\frac{1000}{66}=15.15...$$ حداقل $n=16$

برای آن برنامه می‌نویسیم

بازه [۰،۱] را به چند قسمت مساوی تقسیم کنیم تا تقریبی از $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ به روش ذوزنقه‌ای از 10^{-2} کمتر باشد.

$f(x)=e^{-x^2}$

تمام مراحل شبیه مثال قبلی است فقط ←

$f'(x)=-2xe^{-x^2}$ و $f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2(2x^2-1)e^{-x^2}$

در مسائلی که مشتقات ثابت نیست نمی‌توان از روش قدرمطلق گرفتن و کوچکتر در نظر گرفتن استفاده کرد

می‌دانیم اگر $0<x<1$ پس $0<x^2<1$ در اینصورت $0<2x^2<2$ و

$-1<2x^2-1<1$ نتیجه برای $0<x<1$ همواره $|2x^2-1|<1$ در اینصورت:

$$|f''(x)|=|2(2x^2-1)e^{-x^2}|=2|2x^2-1|e^{-x^2}<2\times1\times1=2$$

$$0<x<1 \Rightarrow 0<x^2<1 \Rightarrow -1<-x^2<0 \xRightarrow{e^x \text{ صعودی}} e^{-1}<e^{-x^2}<e^0$$

ضریب w_1 و w_2 و w_3 را طوری بیابید که فرمول زیر برای چندجمله‌ای‌های درجه دوم دقیق باشند.

$$\int_0^{4h} f(x)dx = w_1 f(h)+w_2 f(2h)+w_3 f(3h)$$

می‌دانیم فرمول خطای روش ذوزنقه‌ای برابر است با:

$$I-T(h)\simeq -\frac{b-a}{12}h^2 f''(t)$$

روش ذوزنقه‌ای دقیق است اگر:

$f''(t)=0 \Rightarrow f'(t)=A$

$f(t)=At+B$

$I=\int_a^b f(x) \simeq T(h)$ و $\int_a^b (A+B)dx = T(h)$

اگر در روش ذوزنقه‌ای $f(x)=1$ آنگاه روش ذوزنقه‌ای دقیق است

$\int_a^b 1\,dx = T(h)$

اگر در روش ذوزنقه‌ای $f(x)=x$ آنگاه روش ذوزنقه‌ای دقیق

یعنی تا درجه ۲ باید درست باشد

$\int_a^b x\,dx = T(h)$

(روش ذوزنقه‌ای دقیق است برای $f(x)=Ax+B$ برای ۱ و برابر x)

چون که روش برای توابع درجه دوم دقیق است پس

$f(x)=1 \Rightarrow \int_0^{4h} 1\,dx = w_1+w_2+w_3$

مقدار انتگرال با توجه به حد بالا و پایین ← $4h = w_1+w_2+w_3$

$f(x)=x \Rightarrow \int_0^{4h} x\,dx = w_1h+2w_2h+3hw_3$

Subject ۳ فصل انتگرال
Date محاسبه خطا و خطا

اگر گفته شود ما گره هم در هم چون روش استفاده می کنیم

$$h(w_1+2w_2+3w_3)=\frac{(4h)^2}{2}=8h^2 \Rightarrow w_1+2w_2+3w_3=8h$$

$$f(x)=x^2 \Rightarrow \int_0^{4h} x^2dx = w_1h^2+4h^2w_2+9h^2w_3$$

دستگاه سه معادله سه مجهول

$$h^2(w_1+4w_2+9w_3)=\frac{(4h)^3}{3}=\frac{64}{3}h^3$$

$$\begin{cases} w_1+w_2+w_3=4h \\ w_1+2w_2+3w_3=8h \\ w_1+4w_2+9w_3=\frac{64}{3}h \end{cases}$$

$w_2=\frac{-4}{3}h$

w_1 و w_3

هم حل میکنیم

می توانیم بجای $f(0)$ ها مقادیر را صفر بگذاریم

۱۳۹۸/۱۰/۱

حالت پیشرفته روش

۱. ریشه معادله $\sin x = x^2$ را با روش نیوتن بدست آورید.

$f(x)=\sin x - x^2$

$f(0)=0$, $f(1)=\sin 1 - 1<0$

$f(0.1)=\sin 0.1-(0.1)^2=0.089>0$

f بر $(0,1)$ پیوسته است و

پس $f(0.1)f(1)<0$ $0.1<\alpha<1$

نیوتن $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $x_0=0.5$

$$x_1=x_0-\frac{\sin x_0-x_0^2}{\cos x_0-2x_0}$$

$0.5-((\sin(0.5)-0.25)\div(\cos 0.5-1))=$

۲. ثابت کنید $\sum_{i=0}^{n} l_i(x)=1$ است

سوال ۱ و ۲ و ۸ ملغی شد که حل شده در جزوه $\xleftarrow{\text{روش حل}}$ لاگرانژ

ضعف لاگرانژ در درونیابی ← جدول تفاضلی فاصله نقاط مساوی الفاصله

خطای درونیابی ← جهت بدست آوردن خطا از نیوتن استفاده میکنیم و مسائل را حل کنید

نیوتن ← جدول تفاضلی نیوتن ← جدول گره ها

بازه $[0,1]$ را به چند قسمت مساوی تقسیم کنیم تا خطای درونیابی از $f(x)=\sin(\frac{\pi}{8}x)$ کمتر باشد 5×10^{-3}

فرض کنید $[0,1]$ را به n قسمت مساوی به شکل زیر تقسیم کرده ایم.

$h=\frac{b-a}{n}$ یا $h=\frac{1-0}{n}$

$0=x_0$ x_1 x_2 x_i $x_n=1$

$x=x_0+h$

$x_i=x_0+ih$ $i=0,1,\dots,n$