مثال: برای داده های جدول زیر یک تابع کمترین مربعات به شکل $P(x)=Ae^{Bx}$ بیابید

x_i	1	2	3
y_i	-1	1	4

نکتهٔ سوال: حتماً از $\ln$ باید استفاده کنید.

$$y=Ae^{Bx} \to \ln y=\ln A+\ln e^{Bx} \to Y=\ln A+Bx$$

به فرم خط تبدیل کردیم

$$Y=\ln y \qquad a=B$$
$$X=x \qquad b=\ln A \qquad Y=aX+b$$

پس جدول X و Y را می کشیم.

X_i	1	2	3
Y_i	$\ln 2$	$\ln 1$	$\ln 4$

$$\begin{cases} a\left(\sum^{3} X_i^2\right)+b\left(\sum^{3} X_i\right)=\sum^{3} X_i Y_i \\ a\left(\sum X_i\right)+3b=\sum Y_i \end{cases}$$

این دو معادله دو مجهول را حل می کنیم، a و b را بدست می آوریم.

اگر $P(x)=\frac{1}{ax+b}$ می نویسند $\frac{1}{y}=ax+b \to Y=ax+b$
(دوباره معادله خط ساختیم.)

البته تو این مثال، همهٔ اعداد رند بود. اگر $\sqrt{2}$ می گذاشتیم، می شد از درونیابی استفاده کرد.
اگر فرم تابع رو بدهند و اعداد هم رند باشند، درونیابی بهتر است چون بعدی می توانیم خطای درونیابی را هم بدست آوریم.

فصل 4: انتگرال گیری عددی $\int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=?$$

این انتگرال را معمولی نمی شه حل کرد. مقدارش رو با روش عددی می شود بدست آورد.

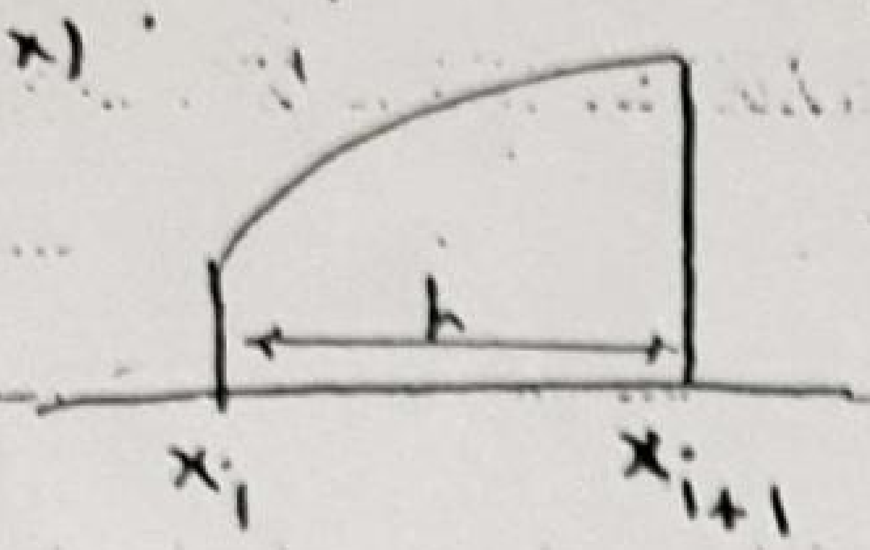
ابتدا بازه $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می کنیم

طول گام $h=\frac{b-a}{n}$

$$a=x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_i \quad \dots \quad b=x_n$$

$$x_i=x_0+ih \qquad i=0,1,2,\dots,n$$

* روش ذوزنقه‌ای :



① ذوزنقه‌ای ساده $f(x) \cong P(x)$

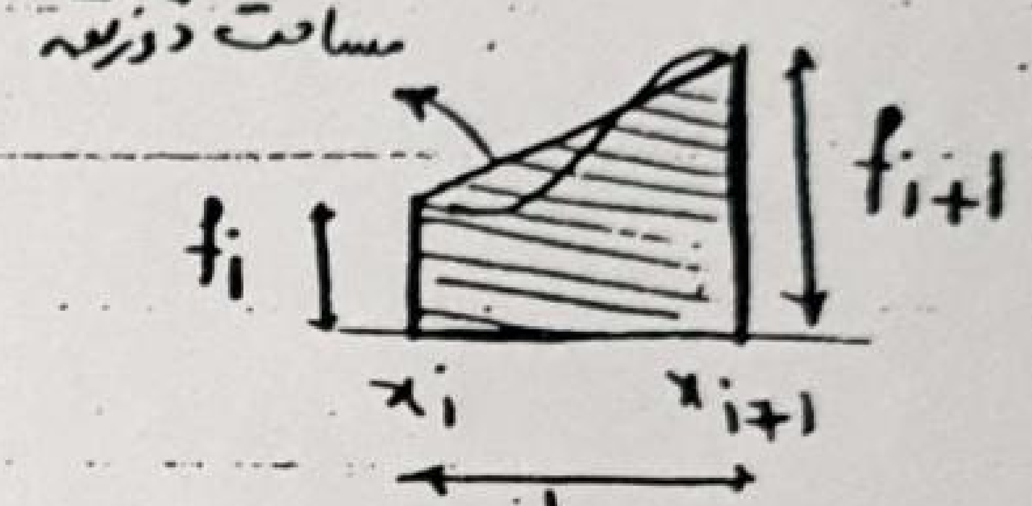
$$\cong f_i + s\Delta f_i$$

که $x = x_i + sh$ ← $dx = h\,ds$

x	s
x_i	0
x_{i+1}	1

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \cong \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f_i + s\Delta f_i)\,dx = \int_0^1 (f_i + s\Delta f_i)\,h\,ds$$

$$\longrightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$



ذوزنقه‌ای مرکب $\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \cdots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n)$

$$\longrightarrow T(h) = \frac{h}{2}\left| f_0 + \underline{\underline{2f_1}} + \underline{\underline{2f_2}} + \cdots + \underline{\underline{2f_{n-1}}} + f_n \right|$$

جلسه دهم :

انتگرال‌گیری عددی

یادآوری: روش ذوزنقه‌ای : $I = \int_a^b f(x)\,dx$ $h = \frac{b-a}{n}$

$$x_0 = a \quad x_1 \ldots x_i \ldots x_n = b$$

$$x_i = a + ih \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

ذوزنقه‌ای با طول گام h $T(h) = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_i + \cdots + 2f_{n-1} + f_n \right]$

$$f_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

مثال: مقدار تقریبی $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ را با طول گام $h = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{4}$

این تابع در صفر مشکل داره. ÷ مبهم می‌شه. باید رفع ابهام کنیم

$h = \frac{1}{2} \longrightarrow n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{\frac{1}{2}} = 2$ $x_0 = 0$ $x_1 = \frac{1}{2}$ $x_2 = 1$

$$I \cong T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1/2}{2}\left[f_0 + 2f_1 + f_2 \right] = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{\sin(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} + \frac{\sin 1}{1} \right] = \ldots$$

$f_0 = f(x_0) = f(0) = \frac{0}{0}$ مبهم

$$\boxed{f_0 = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

به همین ترتیب:

$h = \frac{1}{4} \longrightarrow n = 4 \qquad x_0 = 0 ,\ x_1 = \frac{1}{4} ,\ x_2 = \frac{1}{2} ,\ x_3 = \frac{3}{4} ,\ x_4 = 1$

مثل قبل ...

انتگرال $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ معروف به روش ذوزنقه ای حل نمی شه. $f_n = f(1) ,\ f_0 = f(-1)$

حد هیچ کدام را نمی توان حساب کرد. بینهایت می شه.

حتماً در امتحان می پرسند. ←

خطای قاعده ذوزنقه ای مرکب: خطا = مقدار واقعی - مقدار ذوزنقه Error

اگر $f''(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه ثابت می شود که:

$$E(T(h)) = \int_a^b f(x)\,dx - T(h) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(t) \quad \text{که } a<t<b$$

نکته: روش ذوزنقه ای برای چندجمله ای های درجه اول دقیق است (چون $f''(x) = 0$)

نکته: خطای روش ذوزنقه ای متناسب با h^2 است. (یعنی هرچه طول گام کوچکتر باشد، خطا کم تر می شود.)

(مهم) نکته: اگر فرض کنیم $\max|f''(x)| \leq M_2$ $(a \leq x \leq b)$ (یعنی f'' کراندار باشد)

باشد، آنگاه برای آنکه $|E(T(h))| < \varepsilon$ ، h را باید طوری حساب کنیم که

$$\frac{b-a}{12} h^2 M_2 < \varepsilon \text{ بنابراین } h < \sqrt{\frac{12\varepsilon}{(b-a)M_2}} \text{ بنابراین } n = \frac{b-a}{h} > \frac{b-a}{\sqrt{\frac{12\varepsilon}{(b-a)M_2}}}$$

مثال: حداقل ذوزنقه های لازم برای آنکه تقریبی از $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ دارای خطای کمتر یا مساوی $\frac{1}{6} \times 10^{-2}$ باشد؟

← اگر می گفت «کمتر» جواب آخر که $n \geq 10$ است می شه $n > 10$ یعنی $n \geq 11$

$$|E(T(h))| \leq \frac{1}{6} \times 10^{-2} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$f(x) = e^{-x^2} \longrightarrow f'(x) = -2x e^{-x^2} \longrightarrow f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}$$

$$\longrightarrow f''(x) = -2[1 - 2x^2] e^{-x^2}$$ ماکزیمم این را: مشتق سوم می گیریم

$$f'''(x) = -2[-4x] e^{-x^2} + (-2)(-2x)(1 - 2x^2) e^{-x^2}$$

$$= 4x\,(3-2x^2)\,\underbrace{e^{-x^2}}_{\text{همیشه مثبت}}$$

برای $0\le x\le 1$ می‌دانیم $-2\le -2x^2\le 0$ بنابراین $1\le 3-2x^2\le 3$

بنابراین $f^{(3)}(x)\ge 0$ بنابراین $f''(x)$ صعودی است:

(در تابع صعودی هم، مینیمم و ماکزیمم همان اول و آخر اتفاق می‌افتد.)

$$\max_{0\le x\le 1} f''(x) = f''(1) = 2e^{-1} \qquad \min_{0\le x\le 1} f''(x) = f''(0) = -2$$

$$\longrightarrow -2\le f''(x)\le \frac{2}{e} \longrightarrow \max_{0\le x\le 1}|f''(x)|\le 2 = M_2$$

$$\frac{b-a}{12}h^2 M_2 \le \varepsilon = \frac{1}{6}\times 10^{-2} \xrightarrow{\times 6} \frac{1}{2}h^2\times(2) \longrightarrow h^2\le 10^{-2}$$

$$\longrightarrow h\le 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1}{h}\ge 10 \longrightarrow \boxed{n\ge 10}$$

اگر تقریبی از انتگرال را می‌خواستند، می‌توانیم n رو 10 بگیریم یا 11 بگیریم یا ...

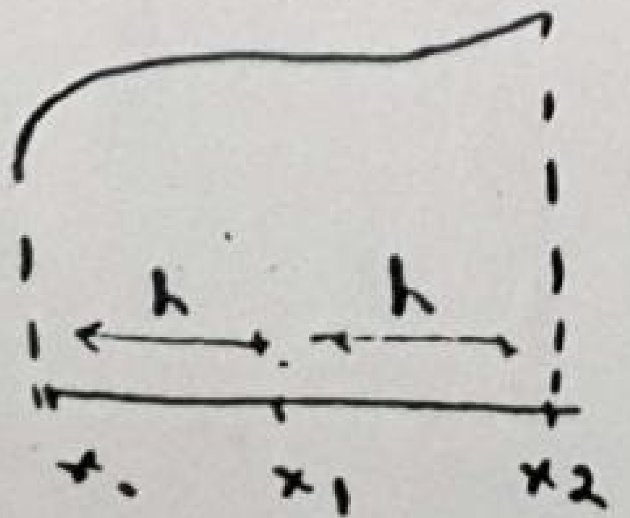
اگر $n = 10 \longrightarrow h = 0.1$

اگر $n = 11 \longrightarrow h = \frac{1}{11}$

سر امتحان بیشتر از $n=4,5$ نمی‌خواهند وقت‌گیر باشه.

روش سیمپسون:

الف) روش سیمپسون ساده:



در این روش هدف محاسبه $I=\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx$ است.

چون فاصله گام‌ها ثابت است، هم می‌شود پیشرو زد و هم می‌شود پسرو. پیشرو را می‌زنم.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$
x_0	f_0		
		Δf_0	
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$
		Δf_1	
x_2	f_2		

$$f(x) \cong P_2(x) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0 \quad \text{که} \quad x = x_0 + sh$$

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \cong \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,dx = \int_0^2 \left(f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0\right) h\,ds \quad \text{بنابراین}$$

کران ها را از اینجا حساب می کنیم $\longrightarrow$

x	s
x_0	0
x_2	2

$x = x_0 + sh$

$$\longrightarrow h \cong \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right]$$

ب) روش سیمپسون مرکب :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

نکته : در روش سیمپسون ، تعداد نقاط تقسیم (n) ، باید زوج باشد.

$x_0 = a \quad x_1 = \quad \dots \quad x_i = \quad \dots \quad x_{n-2} \quad x_{n-1} \quad x_n = b$

زوج $\longleftarrow$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} + \int_{x_2}^{x_4} + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n}$$

$$\longrightarrow I \cong \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right] + \frac{h}{3}\left[f_2 + 4f_3 + f_4\right] + \dots + \frac{h}{3}\left[f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

سیمپسون با گام h

$$S(h) = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

$n = 4$ مثال $\longrightarrow S(h) = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right]$

خطای روش سیمپسون کمتره.

خطای روش سیمپسون مرکب :

اگر $f^{(4)}(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه ،

$$E(s(h)) = \int_a^b f(x)\,dx - s(h) = -\frac{b-a}{18}h^4 f^{(4)}(t) \quad , a<t<b$$

نکته : روش سیمپسون برای چندجمله ای های درجه سوم دقیق است

(چون $f^{(4)}=0$) ← پس بهتره از ذوزنقه - ذوزنقه فقط برای درجه یک ها دقیق بود.

نکته : خطای روش سیمپسون متناسب با h^4 است.

نکته : اگر $\underline{\max|f^{(4)}(x)| \le M_4}$ $(a\le x\le b)$

اگر بخواهیم $|E(s(h))|<\varepsilon$ آنگاه h را طوری می یابیم که $\frac{b-a}{18}h^4M_4<\varepsilon$

با داشتن h ، تعداد نقاط تقسیم n (زوج) محاسبه می شود.

انتگرال $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ را هنوز هم نمی توانیم حل کنیم. روشی باید بسازیم که از نقطه اول و آخر استفاده نشه.

مثال ۱ : تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ به کمک روش سیمپسون بیابید، بطوریکه دارای خطای کمتر از 10^{-3} باشد. (اینکه مثل چند مثال قبل، که بازه 0 تا $\frac{\pi}{2}$ را چند قسمت کنیم؟)

$$|E(s(h))| < 10^{-3}$$

$$f(x) = x\cos x \longrightarrow f'(x) = \cos x - x\sin x$$

$$\longrightarrow f''(x) = -2\sin x - x\cos x \longrightarrow f^{(3)}(x) = -3\cos x + x\sin x$$

$$\longrightarrow f^{(4)}(x) = 4\sin x + x\cos x$$

اینجا که ماکزیمم بین $x<\frac{\pi}{2}$ را می خواهیم، بدون مشتق گیری هم می توانید بگید. ساده است.

$$|f^{(4)}(x)| \le 4|\sin x| + |x||\cos x| \le 4+\frac{\pi}{2} < 6 = M_4$$

← رند می کنیم تا راحت بشیم.

$\rightarrow \max |f^{(4)}(x)| < 6$

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

$$\frac{b-a}{180} h^4 M_4 < 10^{-3} \rightarrow \frac{\frac{\pi}{2}-0}{180} h^4 (6) < 10^{-3} \rightarrow h^4 < \frac{60}{\pi}\times 10^{-3} = \frac{6}{\pi}\times 10^{-2}$$

$$\rightarrow h < \sqrt[4]{\frac{6}{\pi}\times 10^{-2}} = 0.138 \rightarrow n = \frac{b-a}{h} = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{h} > \frac{\pi/2}{0.138} = \frac{\pi}{0.276}$$

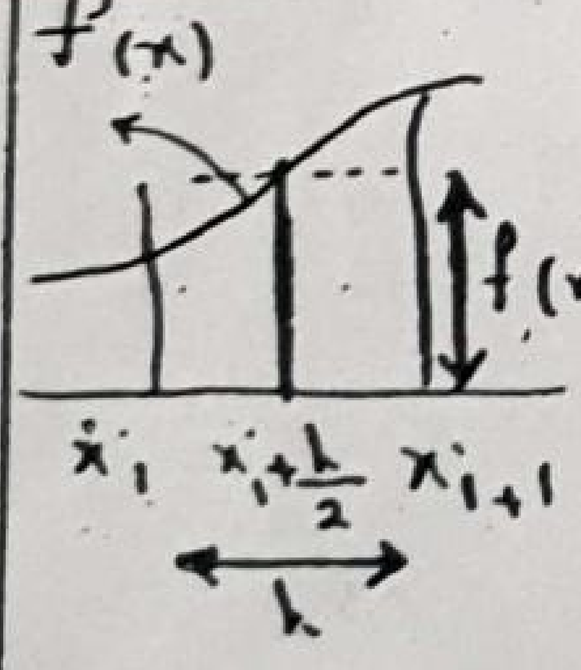
$$\rightarrow n > 11.36 \rightarrow \boxed{n=12} \rightarrow h = \frac{\pi/2}{12} = \frac{\pi}{24}$$

$x_0 = 0 ,\ x_1 = \frac{\pi}{24} ,\ \dots ,\ x_{12} = \frac{\pi}{2}$

با فرمول مقدار تقریبی تابع رو بدست می آوریم.

تمرین: فاصله $[0,1]$ را حداقل چند قسمت کنیم که تقریبی از $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ به روش سیمسون دارای خطای کمتر از 10^{-3} باشد.

روش نقطه میانی:



الف) نقطه میانی ساده: $I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq h f_{(x_i+\frac{h}{2})}$

مثال $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq f(0+\frac{h}{2}) = f(0.5) = \frac{1}{\sqrt{0.5}}$

ب) نقطه میانی مرکب: $I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n}$

$$\rightarrow M(h) = h\left[f(x_0+\frac{h}{2}) + f(x_1+\frac{h}{2}) + \dots + f(x_n+\frac{h}{2})\right]$$

حالا میشه انتگرال $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ را حساب کرد.

خطای نقطه میانی :

$$E(M(h)) = \frac{b-a}{24} h^2 f''(t) \quad a<t<b$$

نکته : خطای ~~[illegible]~~ قاعده نقطه میانی ، نصف خطای قاعده ذوزنقه ای است .

سر امتحان یا از ذوزنقه ای میاد یا سیمپسون . از نقطه میانی ، چند سالی هست که نیومده

حسین پور مبینی [illegible] ۱۳-۱۵ (س ۳)

حمیدرضا حسین زاده ، ، ۱۲ - ۱۰ (بوعلی)

تمرین: اگر $y(x) = 1 - \int_0^x y(t)e^t\,dt$ باشد، آنگاه $y(x)$ را در نقاط $\begin{cases} x_0=0 \\ x_1=0.5 \\ x_2=1 \end{cases}$ به کمک روش ذوزنقه‌ای با

طول گام $h=0.5$ | بیابید. ما باید بر اساس تفاضلات پیشرو چندجمله‌ای درونیاب تابع را در $[0,1]$ بیابیم و سپس تقریب

$y(0.1)$ را بیابید. حل:

الف) $y(x_0) = y(0) = 1$

$h=0.5$

ب) $y(x_1) = y(0.5) = 1 - \int_0^{0.5} \underbrace{y(t)e^t}_{f(t)}\,dt$ ، $y(0.5) \cong 1 - \frac{0.5}{2}[f_0 + f_1]$

$y(0.5) \cong 1 - 0.25\left[y(0)e^0 + y(0.5)e^{0.5}\right] \Rightarrow (1 + 0.25e^{0.5})\,y(0.5) \cong 1 - 0.25$

$y(0.5) \cong A$ ؛ $y(x_2) = y(1) = 1 - \int_0^1 y(t)e^t\,dt$

$y(1) \cong 1 - \frac{0.5}{2}\left[y(0)e^0 + 2y(0.5)e^{0.5} + y(1)e^1\right] = B$

x_i	0	0.5	1
	1	A	B

قاعده رامبرگ: برای آنکه به کمک روش ذوزنقه‌ای و با طول گام‌های مختلف تقریب بهتری برای انتگرال

$I = \int_a^b f(x)\,dx$ بیابیم، از قاعده زیر بنام قاعده رامبرگ استفاده می‌کنیم: $I - T(h) = \underbrace{-\frac{b-a}{12} h^2 f''(t)}_{a_2}$

بنابراین: (1) $I = T(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + \dots \quad \times -1$

a_i متناسب با مشتق‌ها، مستقل از h. اگر h را به $\frac{h}{2}$ تبدیل کنیم: (2) $I = T(\frac{h}{2}) + a_2\frac{h^2}{4} + a_4\frac{h^4}{16} + \dots \quad \times 4$

$4I - I = 4T(\frac{h}{2}) - T(h) + (\frac{a_4}{4} - a_4)h^4 + (\ \dots\ )h^6 + \dots$

$I = \frac{4T(\frac{h}{2}) - T(h)}{3} + a_4'' h^4 + a_6'' h^6 + \dots$

Subject:

Year: Month: Date: ( )

$I = \frac{4T(\frac{h}{2}) - T(h)}{3}$ [illegible] h^4

جدول قاعده رامبرگ

h	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
$h_0 = b-a$	$T(h_0)$			
$h_1 = \frac{b-a}{2}$	$T(h_1)$	$A = \frac{4T(h_1) - T_0}{4-1}$		
$h_2 = \frac{b-a}{2^2}$	$T(h_2)$	$B = \frac{4T(h_2) - T(h_1)}{4-1}$	$A' = \frac{4^2 B - A}{4^2 - 1}$	
$h_3 = \frac{b-a}{2^3}$	$T(h_3)$	$C = \frac{4T(h_3) - T(h_2)}{4-1}$	$B' = \frac{4^2 C - B}{4^2 - 1}$	$\frac{4^3 B' - A'}{4^3 - 1}$

مثال: تقریبی از $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ بیابید که خطای آن متناسب با h^4 باشد.

$a = 0,\ b = 1,\ f(x) = e^{-x^2}$ $h_0 = b - a = 1$, $n = 1$ $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

$T(h_0) = T(1) = \frac{1}{2}[f_0 + f_1] = \frac{1}{2}[e^0 + e^{-1}] = 0.683940$

$h_1 = \frac{1}{2}$ $n = 2$ $x_0 = 0$ $x_1 = \frac{1}{2}$ $x_2 = 1$

$T(h_1) = T(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}}{2}[f_0 + 2f_1 + f_2] = \frac{1}{4}[e^0 + 2e^{-(\frac{1}{2})^2} + e^{-1}] \cong 0.731371$

$h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{h_0}{4} = \frac{1}{4}$ $n = 4$ $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$

$T(h_2) = T(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4] \cong 0.742984$

h	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$
$h_0 = 1$	0.683940	0.747181	
$h_1 = \frac{1}{2}$	0.731371	0.746855	0.746834
$h_2 = \frac{1}{4}$	0.742984		